COLECTÂNEA DE EXERCÍCIOS DE

INTRODUÇÃO À INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Mestrado em Engenharia Informática

RUY ARAÚJO DA COSTA

Departamento de Matemática

F C T - U N L

2011 / 2012

ÍNDICE

F O R M U L A Ç Ã O   D E   P R O B L E M A S

D E

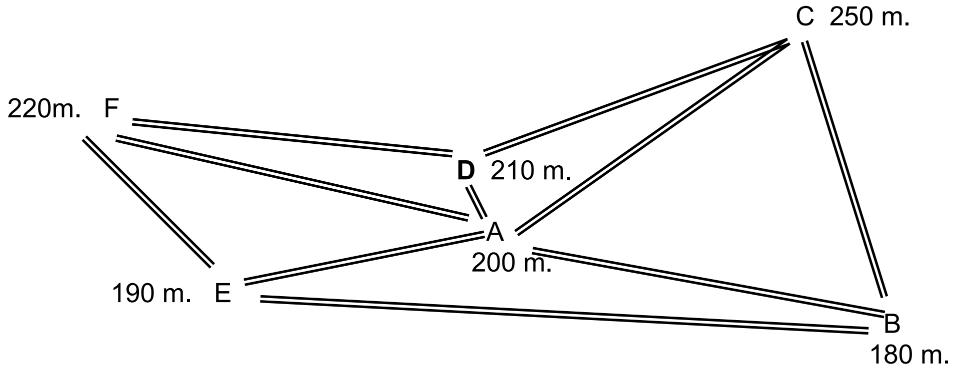
P R O G R A M A Ç Ã O   L I N E A R

E

P R O G R A M A Ç Ã O   L I N E A R   I N T E I R A

- 1 -

Cinco povoações A, B, C, E e F,são abastecidas de água pelo mesmo sistema de abastecimento. Tal sistema consiste num Centro Distribuidor **D** e pelas canalizações esquematizadas na Figura abaixo. O Centro Distribuidor pode abastecer directamente as povoações A, C e F.



O Centro Distribuidor D está situado a 210 m. de altitude. As povoações A, B, C, E e F estão situadas,respectivamente,a 200 m., 180 m., 250 m., 190 m. e 220 m. de altitude.

O abastecimento de C e F implica a utilização de bombas hidráulicas, pelo que corresponde a custos respectivamente iguais a 800 e 600 u.m./u.v. (unidade monetária por unidade de volume).

O abastecimento de A, B e E, é feito por gravidade, estimando-se em 2 u.m./(u.v..km) o custo correspondente à utilização das canalizações para tal utilizadas. Na tabela seguinte são indicados os comprimentos das diferentes canalizações.

Canalizações	CA	DA	FA	AB	CB	EB	AE	FE
Comprimentos (km)	50	5	10	40	60	30	20	17

Na tabela seguinte são indicados os volumes mínimos diários a fornecer a cada povoação :

Povoação	A	B	C	E	F
Volume (u.v.)	60	120	50	150	100

As canalizações DA , DC e DF podem assegurar um escoamento máximo diário de, respectivamente, 200 u.v., 150 u.v. e 180 u.v. .

As restantes canalizações do sistema estão limitadas a um escoamento máximo *diário de 85 u.v. .

Formule um modelo de Programação Linear que lhe permita determinar o esquema de abastecimento de água que minimiza o custo total.

- 2 -

Os dirigentes de uma Cooperativa de Habitação Económica pretendem planear a construção de fogos para os seus sócios. Tal construção decorrerá em duas fases: a primeira até 1999 e a segunda até 2004.

No quadro seguinte indica-se o número de sócios com n elementos no seu agregado familiar, bem como o esforço financeiro associado à aquisição de um fogo de tipo I, II ou III. (Tal esforço financeiro é referenciado na escala 0 : esforço mínimo - 100 : esforço máximo).

n	Nº de agregados familiares com n elementos	Esforço financeiro Tipo de fogo atribuído		
		I	II	III
1	80	30	*	*
2	120	20	50	*
3	200	*	60	70
> 3	100	*	*	80

Nota (*) : Não se contempla a hipótese de atribuir um fogo deste tipo a um agregado familiar com este nº de elementos.

A estimativa do custo de cada tipo de fogo , dada (em u.m.) no quadro seguinte:

Tipo / Fase	I	II	III
1ª	100	150	220
2ª	130	190	260

A Cooperativa dispõe de 40 000 u.m. para aplicar na 1ª fase, estimando-se em 60 000 u.m. a verba dispon¡vel para a 2ª fase.

Pretende-se que na 1ª fase sejam construídos, pelo menos, 200 fogos.

Razões de ordem urbanística levam a que, em relação ao total das duas fases, devam ser verificadas as duas condições seguintes:

- o número de fogos de tipo I não deve ser inferior a 25 % do número de fogos de tipos II e III.

- o número de fogos de tipo III não deve exceder o número de fogos de tipo II.

Sabendo que se pretende minimizar o esforço financeiro global suportado pelos sócios da Cooperativa, elabore um modelo de Programação Linear que pudesse ajudar os dirigentes da Cooperativa a planear a construção dos fogos.

- 3 -

A NOVAir , uma nova companhia de transportes aéreos, que pretende assegurar três tipos de rotas: longo curso (L), médio curso (M), e pequeno curso (P).

Para efeitos de planeamento admite-se que 1 "vôo L" é equivalente a 2 "vôos P", e que 1 "vôo M" é equivalente a 1,5 "vôos P".

Actualmente estuda-se a aquisição dos aviões que irão assegurar os vôos da NOVAir.

No quadro abaixo, são indicadas algumas informações relativas aos aviões de tipos A, B e C, que poderão ser adquiridos.

Tipo de avião	Tipo de rota	Nºpassageiros por avião	Nº "vôos P" por ano e por avião	Custo de aquisição	Custo anual de manutenção
A	L,M,P	200	620 (*)	15	3
B	M,P	150	600	12	2
C	P	100	580	10	1

Notas: 1 - (*) Um avião de tipo A pode efectuar anualmente um número de vôos equivalente a 620 vôos de "pequeno curso".
2 - Os custos indicados no quadro são expressos em u.m. .

A NOVAir dispõe de 300 u.m. para proceder à aquisição dos aviões.

Pretende-se assegurar um mínimo de 2 000, 6 000 e 8 000 vôos L, M e P, por ano, respectivamente. Por outro lado, pretende-se garantir um mínimo anual de 96 000 lugares disponíveis em vôos M , e de 100 000 em vôos P.

Sabendo que se pretende minimizar o custo total de manutenção dos aviões,elabore um modelo de Programação Linear que pudesse ajudar a decidir quais os aviões a adquirir, tendo em conta os condicionalismos referidos.

- 4 -

Uma fábrica dispõe de duas linhas de produção independentes, L1 e L2. A linha L1 é constituída por uma máquina de tipo 1 e uma máquina de tipo 2. A linha L2 é constituída por uma máquina de tipo 1, uma máquina de tipo 2 e uma máquina de tipo 3.

Na fábrica são fabricados três componentes electrónicos A , B e C que são posteriormente montados - na zona de montagem - em conjuntos constitu¡dos por 3 componentes A, 2 componentes B e 1 componente C.

Sabe-se que:

i) cada componente A requer 2 horas de laboração numa máquina de tipo 1 e 1 hora de laboração numa máquina de tipo 2, ou , alternativamente, 3 horas de laboração apenas numa máquina de tipo 1.

ii) cada componente B requer 1 hora de laboração numa máquina de tipo 1 e 4 horas de laboração numa máquina de tipo 2.

iii) cada componente C requer 3 horas de laboração numa máquina de tipo 1 e 2 horas de laboração na máquina de tipo 3 , ou , alternativamente, 4 horas de laboração apenas na máquina de tipo 3.

Assim, as componentes A e B podem ser produzidas nas linhas de produção L1 e L2, enquanto que as componentes C só podem ser produzidas na linha de produção L2. Não é possível, no entanto, utilizar ambas linhas de produção para produzir uma mesma componente, isto é pode haver componentes A (ou B) produzidas só na linha L1 e componentes A (ou B) produzidas só na linha L2 ; não pode haver componentes A (ou B) produzidas em L1 *e* em L2 simultaneamente.

Cada máquina da linha de montagem L1 pode laborar um máximo de 30 horas semanais. Cada máquina da linha de montagem L2 pode laborar um máximo de 25 horas semanais.

A fábrica dispõe de 9 trabalhadores (com horário semanal de 36 horas) - a cada máquina é afectado um trabalhador, ficando 4 trabalhadores no sector de montagem. Cada trabalhador recebe 0,9 u.m. por cada hora de trabalho no sector de produção e 1,0 u.m. por cada hora de trabalho no sector de montagem.

Cada conjunto electrónico demora 5 horas a ser montado. Os trabalhadores afectados às máquinas poderão, quando as respectivas máquinas não estiverem em funcionamento, ser utilizados no sector de montagem.

O custo de materiais envolvidos em cada componente cifra-se em 3 u.m , 2 u.m. ou 4 u.m. , por cada componente A, B ou C respectivamente.

O custo de utilização de uma máquina de tipo 1, 2 e 3 é , respectivamente, igual a 1 u.m./h, 5 u.m./h e 6 u.m./h .

Cada conjunto electrónico é vendido por 500 u.m. .

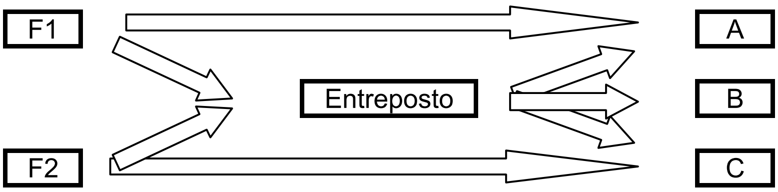
Sabendo que se pretende maximizar o lucro, formule o problema com um modelo de Programação Linear, que lhe permitisse determinar o plano óptimo de produção.

- 5 -

Duas fábricas F1 e F2 produzem semanalmente respectivamente, 2700 e 2200 unidades de um determinado produto, abastecendo três clientes A, B e C, com necessidades semanais, respectivamente, iguais a 1700, 1000 e 1800 unidades. Considera--se que estas necessidades deverão ser obrigatoriamente satisfeitas.

Sabe-se que não são efectuados transportes entre uma fábrica e um cliente a distâncias superiores a 60 km.

Cada cliente pode ser abastecido directamente por cada fábrica (desde que a distância não exceda 60 km), ou por um entreposto. O entreposto é abastecido pelas duas fábricas. - Ver esquema abaixo:



A matriz seguinte indica as distâncias (em km) entre as fábricas/clientes/entreposto:

	A	B	C	Entreposto
F1	50	70	90	30
F2	80	70	40	20
Entreposto	60	50	60	---

O custo de transporte de uma unidade de produto é igual a 3 u.m./km.

A utilização do entreposto traduz-se num custo de 5 u.m. por cada unidade de produto que transite pelo entreposto.

Formule o problema com um modelo de Programação Linear, que lhe permita determinar o plano de abastecimento semanal que minimiza o custo total.

- 6 -

A PAPIREX , uma empresa que comercializa toalhas de papel para mesas e "toalhetes" para utilização em tabuleiros.

Cada toalha tem 1 m x 1 m e cada toalhete tem 0,80 m x 0,45 m.

A PAPIREX fabrica as toalhas e os toalhetes a partir de "folhas standard" de 2m x 2m, cortando-as de modo a que, pelo menos, uma toalha de 1 m x 1 m seja sempre retirada de cada "folha standard".

Sabendo que se pretende satisfazer totalmente uma encomenda de 4 000 toalhas e 80 000 toalhetes, elabore um modelo de Programação Linear que lhe permita determinar o "plano de corte" das "folhas standard" que minimiza os desperdícios.

- 7 -

O Ministro da Cultura da Lusólia está a preparar a programação das actividades que farão parte de "Lisbólia - Capital da Cultura" que decorrerá em 2001.

Serão considerados seis tipos de iniciativas: "Óperas, Concertos Clássicos, Concertos Rock, Bailado, Exposições e Cinema/Teatro. Para efeitos de programação o ano será dividido em três épocas: Jan-Abr , Mai-Set e Out-Dez. No quadro seguinte são indicadas com * as épocas para as quais é possível programar os diferentes tipos de iniciativas.

Indica-se ainda, para cada iniciativa (por "espectáculo" i.e., por cada ópera,..., por cada exposição,...) o grau de satisfação do público jovem e do público adulto (em u.s. - - unidades de satisfação) e o seu custo (em u.m.).

	Època			Custo	Satisfação (u.s.)	
	Jan-Abr	Mai-Set	Out-Dez	(u.m.)	Jovens	Adultos
Óperas	*		*	100	10	12
Concertos Clássicos	*		*	50	13	15
Concertos Rock	*	*		30	19	15
Exposições		*	*	25	16	14
Bailados	*	*	*	15	15	15
Cinemas / Teatro	*	*	*	10	16	17

O Ministro da Cultura decidiu que

* no mínimo, dever-se-ia apresentar uma ópera na programação

* o número total de concertos clássicos não deveria ser inferior ao número total de concertos rock

* o número total de concertos rock não deveria ser inferior ao número total de bailados

* o número de "espectáculos" em cada época deveria situar-se entre 20 % e 60 % do número total de "espectáculos" a realizar

* a satisfação global do público jovem não deve ser inferior a 70 % da satisfação global do público adulto

O Ministro da Cultura pretende maximizar a satisfação global do público adulto, dispondo de um orçamento de 3 500 u.m. .

Elabore um modelo de Programação Linear adequado para ajudar o Ministro da Cultura a preparar "Lisbólia - Capital da Cultura".

- 8 -

A Lusólia é um país que pode ser dividido em quatro zonas (1 a 4).

O Primeiro Ministro da Lusólia está interessado em "atacar o problema da falta de habitações no País". Sabe-se que, no total, seriam necessárias mais 115 000 novas habitações.

O Quadro seguinte indica o número de habitações necessárias em cada zona, bem como o seu custo de construção e a "satisfação popular" associada.

Zona	Nº habitações necessárias	Custo de uma habitação (u.m.)			Satisfação (u.s./habitante)	
		1999	2001	2003	até 2001	pós 2001
1	50 000	10	12	14	3	2
2	30 000	8	9	11	4	2
3	20 000	7	9	10	5	3
4	15 000	7	8	9	4	4

Assim, e a título de exemplo, a construção de uma nova habitação na zona 2, em 2001, teria um custo de 9 u.m. , e corresponderia a 4 u.s. (unidades de satisfação).

As disponibilidades financeiras para 1999, 2001 e 2003 ciframe-se, respectivamente, em 300 000 u.m., 400 000 u.m. e 500 000 u.m. .

Por imperativos de ordenamento regional, não se pode atribuir à zona 1 um número total de novas habitações superior ao dobro do número total de novas habitações atribuídas ao conjunto das zonas 3 e 4.

Formule o problema com um modelo de Programação Linear, que ajude o Primeiro Ministro a decidir qual o plano habitacional que maximiza a satisfação popular total até ao final de 2003.

- 9 -

Uma pequena unidade industrial produz dois tipos de peças.

A produção de uma peça de tipo 1 requer 3 horas de laboração na máquina A1, ou, alternativamente, 4 horas na máquina A2. Adicionalmente, cada peça de tipo 1 processada pela máquina A1 requer 1 hora na máquina B1, ou, alternativamente, 2 horas na máquina 2 ; cada peça de tipo 1 processada pela máquina A2 requer 3 horas na máquina B2, ou, alternativamente, 5 horas na máquina B3.

A produção de uma peça de tipo 2 requer 2 horas de laboração na máquina A1 e 1 hora na máquina B1 ou, alternativamente, 3 horas na máquina A2 e 2 horas na máquina B3.

Sabe-se que cada máquina de tipo A não deve laborar mais de 40 horas por semana, e que cada máquina de tipo B não deve trabalhar mais de 35 horas por semana.

O custo horário de funcionamento de cada uma das máquinas de tipo A é igual a 30 u.m.. O custo horário de funcionamento das máquinas B1, B2 e B3 ,é respectivamente, igual a 20 u.m., 50 u.m. e 20 u.m. .

A matéria-prima utilizada por cada peça de tipo 1 custa 200 u.m. . A matéria-prima utilizada por cada peça de tipo 2 custa 300 u.m. .

Cada peça de tipo 1 é vendida a 1 500 u.m. e cada peça de tipo 2 é vendida a 1 000 u.m. .

Formule o problema com um modelo de Programação Linear, que lhe permita determinar o plano de produção que maximiza o lucro.

- 10 -

A A.E.P. - Agência Espacial Portuguesa - está a planear três lançamentos dos seus foguetões LUSITANO - um lançamento em 1999 e dois lançamentos em 2001.

Sabe-se que cada LUSITANO pode transportar uma carga com volume máximo de 700 u.vol. e com peso máximo de 1000 u.peso .

O custo de cada lançamento e estimado pela A.E.P. em 7 000 u.m. .

A lista de potenciais interessados em utilizar os LUSITANOS e os correspondentes volumes, pesos e valores a cobrar pela A.E.P. , a seguinte:

Utilização							
Fins Comerciais				Fins Científicos			
CLIENTE	Volume (u.vol.)	Peso (u.peso)	A Cobrar (u.m.)	CLIENTE	Volume (u.vol.)	Peso (u.peso)	A Cobrar (u.m.)
SATELCOM1 *	200	700	8 600	FCTEXP	450	300	7 650
SATELCOM2 **	500	600	11 400	BIOESPAÇO	300	200	4 600
TVESPAÇO *	380	430	7 640	CIÊNCIA *	250	400	5 700
ESPIASAT	150	250	3 500	MEDICSPACE	350	500	7 950
TEMPOSAT	240	320	4 960	PHYSICSAT	250	300	4 900

Obs.: * - Cliente interessado em lançamento apenas em 1999.
** - Cliente interessado em lançamento apenas em 2001.

Por razões de "imagem", a A.E.P. pretende aceitar, pelo menos uma encomenda para fins científicos em cada um dos anos.

Formule o problema, com um modelo adequado de Programação Linear (que pode incluir variáveis binárias), que lhe permita planear os três lançamentos de modo a maximizar os lucros da A.E.P. .

- 11 -

Uma importante empresa de projectos dispõe de três "polos" (gabinetes): o "polo-sede em Lisboa e os "polos" de Coimbra e Porto.

O Director-Geral da empresa está a estudar a possibilidade de a empresa se candidatar a alguns projectos internacionais, estando actualmente em análise os projectos A, B, C, D e E.

O quadro seguinte indica o valor do lucro (u.m.) que a empresa pode obter, em função do projecto e do "polo" encarregado de o desenvolver.

PROJECTO / POLO	A	B	C	D	E
Lisboa	10	12	9	15	3
Porto	12	11	5	13	14
Coimbra	7	10	6	*	8

Nota (*): Por razões técnicas o "polo" de Coimbra não poderá concorrer ao projecto D.

O Director-Geral decidiu autorizar que o "polo-sede" se candidate a dois projectos e que cada um dos outros dois "polos" se candidate apenas a um projecto.

Pretende-se determinar qual(is) o(s) projecto(s) se deve(m) candidatar os três "polos" da empresa, sabendo que se pretende maximizar os lucros.

Formule o problema utilizando variáveis binárias (ou, um modelo de Programação Linear).

- 12 -

As eleições na Lusólia já não tardavam. Era preciso planear novas obras e impressionar os eleitores.

O Primeiro-Ministro decidiu mandar construir duas pontes, uma auto-estrada, vinte escolas, dez lares para a 3ª idade e trinta jardins infantis.

O Ministro do Planeamento apresentou a matriz de ganhos eleitorais e de custos de execução correspondentes às diferentes iniciativas propostas pelo Primeiro-Ministro nas três regiões do país (Norte, Centro e Sul):

Região:	Norte		Centro		Sul	
Realização de:	Ganhos (votos)	Custos (u.m.)	Ganhos (votos)	Custos (u.m.)	Ganhos (votos)	Custos (u.m.)
1 ponte	50 000	30	30 000	25	60 000	35
1 auto-estrada	40 000	26	40 000	23	40 000	20
1 escola	5 000	3	7 000	2	6 000	4
1 lar 3ª idade	7 000	2	6 000	3	8 000	2
1 jardim infantil	1 000	1	2 000	1	1 000	1

De acordo com o Ministro do Planeamento deverão ser respeitadas as seguintes condições:

- cada uma das novas pontes deve ficar numa região diferente;
- a auto-estrada deve ficar na região à qual não for atribuida qualquer ponte;
- os números mínimos e máximos de escolas, lares da 3ª idade e jardins infantis a construir nas três regiões é dado no quadro seguinte:

Região:	Norte		Centro		Sul	
	Mín.	Máx.	Mín.	Máx.	Mín.	Máx.
Escolas	5	10	6	15	3	12
Lares	2	6	3	9	3	10
Jardins	4	15	5	17	6	20

O Ministro das Finanças declarou poder disponibilizar 200 u.m. para as novas construções.

Formule o problema, com um modelo adequado de Programação Linear (que pode incluir variáveis binárias).

- 13 -

Uma empresa multinacional produtora de peças A, B e C fabricadas nas suas 5 fábricas (A, B, C, D e E) em 4 países P1, P2, P3 e P4 (P1 e P2 países da Europa ; P3 e P4 países da América) está a estudar o seu plano de produção e distribuição, visando maximizar os lucros.

O lucro unitário (em u.m.) associado a venda da cada peça em cada país é dado no quadro seguinte.

	A	B	C	D	E	Procura Mensal
P1	10	15	12	23	35	320
P2	*	25	13	12	28	340
P3	13	18	*	15	13	340
P4	12	10	18	10	19	400
Capacidade de Produção Mensal	200	300	400	150	250	1 300

Formule o problema com um modelo de Programação Linear Inteira.

O Departamento de Planeamento do BNR (Banco Novo Rico) está a estudar a implantação do banco num dado país. Para tal considera-se o país dividido em três regiões (A, B e C) e a possibilidade de instalar agências bancárias de quatro tipos (I, II, III e IV).

O quadro seguinte indica o custo (u.m.) e o "impacto" (1- mínimo ; 10 - máximo) correspondente aos diferentes tipos de agêcia nas diferentes regiões:

Região	A		B		C	
Tipo de Agência	Custo	Impacto	Custo	Impacto	Custo	Impacto
I	100	9,3	120	9,5	90	10,0
II	90	8,2	100	8,5	85	9,0
III	70	6,3	80	6,0	65	7,0
IV	50	3,2	70	2,5	50	4,0

O BNR foi autorizado a abrir um total de 100 agências, tendo-se comprometido a respeitar os números mínimo e máximo de novas agências a abrir nas diferentes regiões indicados na tabela seguinte:

Zona:	A	B	C
Nº mínimo	10	30	15
Nº máximo	20	70	30

O Departamento de Planeamento do BNR decidiu

* abrir pelo menos três agências de tipo I em cada região
* que o número total de agências de tipo I deve ser superior ao número total de agências de tipo II
* investir, no máximo, 8500 u.m. na construção das novas agências

Sabendo que se pretende maximizar o "impacto" global da abertura das novas agências do BNR, elabore um modelo de Programação Linear Inteira adequado.

- 15 -

A SELECTA é uma empresa que selecciona pessoal para outras empresas. De momento a SELECTA está a analisar seis candidatos destinados a quatro vagas. Os referidos candidatos prestaram provas de aptidão para as quatro vagas tendo obtido os seguintes resultados na escala [0,100] (0 - péssimo ; 100 - óptimo) :

Candidato / Vaga	A	B	C	D	E	F
1	10	20	50	75	3	10
2	30	51	92	84	45	1
3	5	64	30	52	39	72
4	68	9	71	4	5	23

Sabe-se que a SELECTA considera que:

i) Qualquer candidato com menos de 10 pontos numa determinada prova de aptidão está automaticamente excluído da vaga correspondente.

ii) Qualquer candidato com menos de 10 pontos em mais de uma prova de aptidão é automaticamente excluído de todas as vagas .

Formule o problema com um modelo de Programação Linear Inteira, de modo a poder ajudar a SELECTA a efectuar a selecção dos candidatos.

- 16 -

O Director de Programação do canal de televisão **AiTêVê** foi seriamente advertido pelo Presidente do Conselho de Administração : "Pensa que isto é algum canal da Igreja, ou quê ? Está a ver-me com cara de Madre Teresa de Calcutá ? 💣 💣 💣 **! ! !** Eu quero **LUCROS ! ! !** Ou me apresenta uma nova grelha de jeito, ou então 💣 💣 💣 **RUA ! ! !**"

Um tanto enervado o (ainda) Director de Programação da **AiTêVê** consultou o seu quadro de lucros horários (em u.m.) com a Publicidade, em função do tipo de programa, da hora de emissão e do dia da semana, que se apresenta de seguida:

Horário de emissão		**Tipo de Programa**			
		Informativos	**Filmes**	**Telenovelas**	**Séries**
Das 14 às 19	**2ª/6ª F**	5	8	8	9
	Sáb/Dom	8	14	7	9
Das 19 às 22	**2ª/6ª F**	15	14	19	8
	Sáb/Dom	15	15	13	7
Das 22 às 01	**2ª/6ª F**	13	18	5	9
	Sáb/Dom	11	22	3	6

"Ora bem a programação diária não pode ser inferior a 10 horas... Hummmm...

... O número total de horas de Filmes deverá ser, no mínimo, igual ao número total de horas de Telenovelas... Hummm ...

... O número total (de 2ª a 6ª Feira) de horas de Informativos deverá ser, pelo menos, duplo do número total (de 2ª a 6ª Feira) de horas de Séries... Hummm ...

... Ou é da minha vista, ou esta droga resolve-se por Programação Linear ! "

Formule, com um modelo de Programação Linear adequado, o problema do Director de Programação da **AiTêVê** .

- 17 -

O **Rato Dourado** é um famoso ladrão de ourivesarias, muito procurado pela Polícia, conhecido por utilizar uma pequena mochila para transportar os seus saques.

O canal de televisão **AiTêVê**, para o seu próximo programa **"Gamanço em Directo"** decidiu seguir o **Rato Dourado** numa das suas incursões...

"Ora cá estamos nós em mais um **"Gamanço em Directo"**, desta vez seguindo o famoso **Rato Dourado** !", sussurou o apresentador, tremendo com a possibilidade (remota) da Polícia aparecer...

"Vindos de um cano de esgoto, acabámos de penetrar numa Ourivesaria da Baixa (não posso dizer o nome, porque não fazemos publicidade neste programa). O **Rato Dourado** é, na verdade , fantástico ! Os alarmes sofisticados nem piaram e, graças às persianas metálicas de segurança que nos isolam dos olhares dos noctívagos, podemos acender os nossos holofotes e mostrar-lhes as preciosidades que temos à nossa frente. "

Seguem-se uns minutos de filmagem ...

"Senhor **Rato Dourado** diga-nos como vai decidir o que levar na sua mochila ?", perguntou respeitosamente o apresentador.

"Enquanto vocês filmavam tudo com esse ar embasbacado, preenchi este quadro !", disse o **Rato Dourado** exibindo o quadro que a seguir se apresenta:

Possíveis artigos a gamar	**Quantidade existente**	**Informações por unidade de artigo**		
		Volume (u.vol.)	**Peso (u.peso)**	**Valor (plins)**
Pérolas	525	2	1	320
Anéis	250	3	4	520
Colares	100	7	10	1 250
Pulseiras	120	6	9	1 000
Taças	35	25	35	3 500
Libras em Ouro	753	3	5	600

"Agora é só correr o meu modelo de Programação Linear Inteira no meu microcomputador portátil para determinar o **gamanço óptimo**, sabendo que não pretendo ultrapassar as 1 500 u.vol. da minha mochila, nem as 1 000 u.peso (é que os anitos já vão pesando... Hi ! Hi ! Hi !) ", disse o **Rato Dourado** olhando para o ecran de cristais líquidos do seu microcomputador portátil.

Conceba um modelo de Programação Linear Inteira que pudesse ser instalado no microcomputador portátil do **Rato Dourado** para o ajudar na sua tarefa.

- 18 -

O Gerente da **PC Land** tem de decidr quantos computadores MegaFast e MicroTornado encomenda para a sua loja.

Cada MegaFast é comprado pela PC Land por 25 u.m. por unidade. Cada MicroTornado é comprado por 32 u.m. por unidade, para compras até 20 unidades e 30 u.m. por unidade para compras superiores a 20 unidades. A PC Land vende cada MegaFast a 35 u.m. e cada MicroTornado a 43 u.m..

O MegaFast é comprado pela PC Land em lotes de 5 unidades e o MicroTornado é comprado em lotes de 10 unidades.

O Gerente decidiu que se comprar mais do que 20 unidades de MicroTornado, comprará pelo menos 15 unidades de MegaFast. De qualquer modo, relativamente ao MegaFast, ou não compra qualquer unidade, ou compra pelo menos 10 unidades desse computador.

A PC Land tem um número de clientes que garante o escoamento dos computadores comprados, mas atravessa algumas dificuldades de tesouraria e, assim, não dispõe de mais de 1500 u.m. para investir na encomenda de MegaFasts e de MicroTornados.

Ajude o Gerente a decidir quantos MegaFasts e MicroTornados deve comprar, formulando o problema com um modelo de Programação Linear Inteira.

- 19 – (revisitando o problema 12)

As eleições na Lusólia já não tardavam. Era preciso planear novas obras e impressionar os eleitores.

O Primeiro-Ministro decidiu mandar construir três pontes, uma auto-estrada, vinte escolas, dez lares para a 3ª idade e trinta jardins infantis.

O Ministro do Planeamento apresentou a matriz de ganhos eleitorais e de custos de execução correspondentes às diferentes iniciativas propostas pelo Primeiro-Ministro nas três regiões do país (Norte, Centro e Sul):

Região:	Norte		Centro		Sul	
Realização de:	Ganhos (votos)	Custos (u.m.)	Ganhos (votos)	Custos (u.m.)	Ganhos (votos)	Custos (u.m.)
1 ponte	50 000	30	30 000	25	60 000	35
1 auto-estrada	40 000	26	40 000	23	40 000	20
1 escola	5 000	3	7 000	2	6 000	4
1 lar 3ª idade	7 000	2	6 000	3	8 000	2
1 jardim infantil	1 000	1	2 000	1	1 000	1

De acordo com o Ministro do Planeamento deverão ser respeitadas as seguintes condições:

- se uma das novas pontes ficar na região Norte, então pelo menos uma ponte deverá ser construída na região Centro;

- a auto-estrada deve ficar na região à qual não for atribuida qualquer ponte;

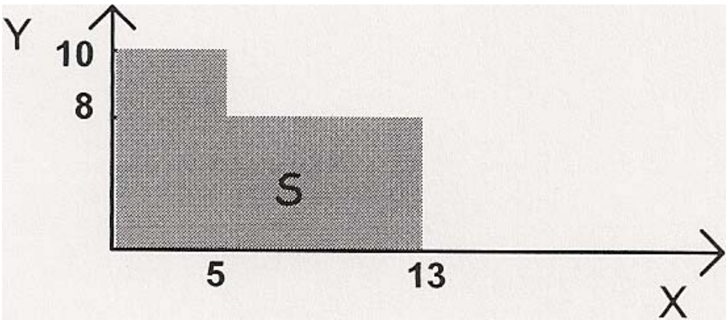
- se o somatório dos números de escolas, lares da 3ª idade e jardins infantis a construir nas região Sul for inferior a 15, então deverá ser construída uma ponte nessa região.

O Ministro das Finanças declarou poder disponibilizar 200 u.m. para as novas construções.

Formule o problema, com um modelo adequado de Programação Linear (que pode incluir variáveis binárias).

- 20 -

Considere a região admissível ***S***, esquematizada abaixo.

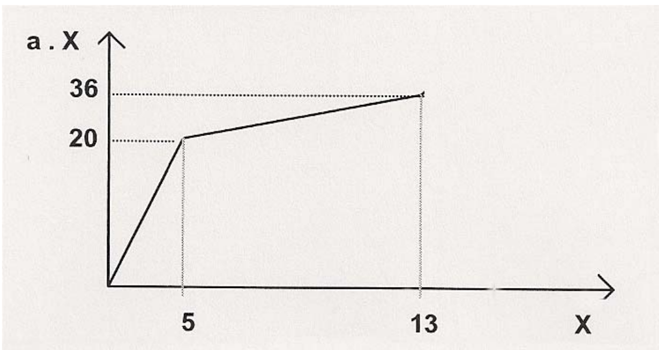


Pretende-se resolver o seguinte problema de optimização:

Min F = **a** X + **b**Y,

Sujeito a ***S***.

Sabe-se **b** é igual a **3** para Y inferior a 8 e a **2** para Y não inferior a 8. Por outro lado, **a** depende de X, como se esquematiza abaixo:



Represente o problema que se pretende resolver sem utilizar disjunções.

PROGRAMAÇÃO LINEAR

O ALGORITMO SIMPLEX

- 1 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear :

MIN $F = -X + 2Y$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
X + Y &\le 3 \\
X + 4Y &\ge 4 \\
-X + Y &\le 0 \\
X , Y &\ge 0
\end{aligned}
$$

a) Resolva-o graficamente.

b) Se ao problema indicado inicialmente se acrescentar a restrição $4X + 2Y \le 8$, manter-se-á a solução óptima determinada na alínea a) ? Justifique.

- 2 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

Max $F = X + Y$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
2X + Y &\ge 10 \\
X + 2Y &\le 14 \\
2X - 2Y &\le 5 \\
X , Y &\ge 0
\end{aligned}
$$

a) Resolva-o graficamente.

b) Se ao problema inicial se acrescentar a condição "X, Y inteiros", qual a sua solução ? (Utilize a resolução gráfica da alínea a))

c) Admita que, relativamente ao problema inicial, se altera o objectivo para Max $F = \theta X + Y$, com $\theta \in R$.

Utilizando a resolução gráfica da alínea a), resolva este problema de P.L. Paramétrica, em função do parâmetro θ .

d) Admita que, relativamente ao problema inicial, se acrescentou a condição "X, Y inteiros" e se alterou o objectivo para Max $F = \theta X + Y$, com $\theta \in R$.

Resolva este problema de P.L.I. Paramétrica, em função do parâmetro θ .

- 3 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear :

$$\text{Max } F = X + 2Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\geq 3 \\ -X + Y &\leq 1 \\ X &\leq 2 \\ X , Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) Admita que o termo independente da 1ª restrição passa a ser θ ($\theta > 0$). A partir da resolução gráfica da alínea anterior, resolva o problema de Programação Linear Paramétrica resultante.

- 4 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear :

$$\text{MAX } F = X + Y$$

sujeito a :

$$\begin{aligned} X + Y &\geq 8 \\ X &\leq 6 \\ Y &\leq 5 \\ X , Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) A partir da resolução gráfica da alínea anterior, identifique a base óptima deste problema.

- 5 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear :

M?? $F = X + Y$

sujeito a :

$$\begin{aligned} X + Y &\geq 8 \\ X &\leq 6 \\ Y &\leq 5 \\ X , Y &\geq 0 \end{aligned}$$

Sabendo que este problema admite múltiplas soluções óptimas,

a) Indique, justificadamente, se se trata de um problema de maximização ou de minimização.

b) Resolva o problema.

c) Indique a solução óptima correspondente a $X^* = 4$. Tratar-se-á de uma solução básica ? Justifique.

- 6 -

Considere o espaço de soluções admissíveis, S, definido por:

$$\begin{aligned} 2X + 3Y &\leq 30 \\ X + 3Y &\geq 18 \\ Y &\leq 5 \\ X , Y &\geq 0 \end{aligned}$$

Relativamente ao espaço de soluções admissíveis S, complete:

a) Se o objectivo for MAX $F = 1X + 3Y$ a solução óptima será

(X^*, Y^*) = ________________________________ , com F^* = __________.

b) Se o objectivo for MIN $F = 1X + 3Y$ a solução óptima será

(X^*, Y^*) = ________________________________ , com F^* = __________.

c) Se o objectivo for M___ $G = 2X$ _____ Y a solução óptima será

$(X^*, Y^*) = (12, 2)$, com G^* = __________.

d) Se o objectivo for M___ H = _____ $X - 6Y$ a solução óptima será

$(X^*, Y^*) = (12, 2) + (1 - \lambda)(15/2, 5)$, $\lambda \in [0, 1]$.

- 7 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 2X + Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\leq 8 \\ X + Y &\geq 5 \\ -X + Y &\leq 3 \\ X - Y &\leq 3 \\ X, \; Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) A partir da resolução gráfica da alínea anterior, identifique a base óptima deste problema.

- 8 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 2X + 5Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\leq 10 \\ X + 2Y &\leq 12 \\ X + 3Y &\leq 15 \\ X, \; Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) A partir da resolução gráfica do problema dado, indique, justificando sucintamente, quais as variáveis que pertencem à base óptima do problema.

c) Admita que, relativamente ao problema inicial, se altera o objectivo para Max $F = \theta X + 5Y$, com $\theta \in R$.

Utilizando a resolução gráfica da alínea a), resolva este problema de P.L. Paramétrica, em função do parâmetro θ .

d) Admita que, relativamente ao problema inicial, se acrescentou a condição "X, Y inteiros" e se alterou o objectivo para Max $F = \theta X + 5Y$, com $\theta \in R$.

Resolva este problema de P.L.I. Paramétrica, em função do parâmetro θ .

- 9 -

Considere o seguinte problema de optimização:

Max $F = 5X + 6Y$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2X + 3Y &\leq 16 \\ 3X + 2Y &\leq 17 \end{aligned}$$

a) Recorrendo ao Método Gráfico, resolva-o considerando:

i)	$X, Y \geq 0$	(Programação Linear)
ii)	$X, Y \geq 0$ <u>**e**</u> X inteira	(Programação Linear Mista)
iii)	$X, Y \geq 0$ <u>**e**</u> Y inteira	(Programação Linear Mista)
iv)	$X, Y \geq 0$ <u>**e**</u> X, Y inteiras	(Programação Linear Inteira)

b) Compare os resultados obtidos na alínea anterior.

- 10 -

Apresentando exemplos <u>simples</u> de resoluções gráficas relativas a um problema **A** de **Programação Linear** e do correspondente problema **B** de **Programação Linear Inteira** (que se obtém a partir de A, com a exigência da integralidade das variáveis), indique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

I) Se **A** e **B** admitem soluções óptimas únicas, então a solução óptima de **B** é, de entre as soluções admissíveis inteiras, a "mais próxima" da solução óptima de **A**.

II) Se **A** admite pelo menos uma solução óptima, então **B** também admite pelo menos uma solução óptima.

III) Se **B** admite pelo menos uma solução óptima, então **A** também admite pelo menos uma solução óptima.

IV) Se **A** admite uma solução óptima única, então **B** também admite uma solução óptima única.

V) Se **A** admite múltiplas soluções óptimas, então **B** também admite múltiplas soluções óptimas.

VI) Se **A** e **B** não forem impossíveis e se **A** admite uma solução óptima única, então **B** também admite uma solução óptima única.

VII) Se **A** e **B** não forem impossíveis e se **A** admite múltiplas soluções óptimas, então **B** também admite múltiplas soluções óptimas.

VIII) Se **B** admite uma solução óptima única, então **A** admitirá pelo menos uma solução óptima.

IX) Se **A** admite uma solução óptima única, então **B** admitirá pelo menos uma solução óptima.

X) Se **A** e **B** não forem impossíveis e se **A** admite uma solução óptima única, então **B** admitirá pelo menos uma solução óptima.

XI) Se **A** e **B** não forem impossíveis e se **B** admite uma solução óptima única, então **A** admitirá pelo menos uma solução óptima.

XII) Se **A** e **B** não forem impossíveis, o valor óptimo da função objectivo do problema **B** é sempre pior que o valor óptimo da função objectivo do problema **A**.

- 11 -

Complete o seguinte "Quadro do Simplex" de modo a que corresponda a uma solução básica degenerada óptima e única .

	X	Y	Z	F1	F2	F3	TI
?	0	?	1	?	0	2	?
Y	1	?	?	?	0	0	?
?	-1	?	?	?	1	2	?
F	?	?	?	0	0	2	?

- 12 -

Considere o seguinte "Quadro do Simplex":

	X	Y	Z	F1	F2	F3	TI
Y	0	1	-1	0	1/2	2	2
X	1	0	1	0	0	0	3
F1	0	0	2	1	1	2	6
F	0	0	-2	0	-1	2	10

Resolva o correspondente problema de Programação Linear.

- 13 -

Uma refinaria produz três derivados do petróleo D1, D2 e D3.

Para a produção dos referidos derivados são consumidos dois recursos: crude e energia. A tabela seguinte indica o consumo de cada recurso necessário à produção de 1 u.vol. de cada derivado.

Derivado (1 u.vol.)	Crude (barris)	Energia (u.e.)
D1	4	2
D2	2	4
D3	6	8

O lucro unitário associado aos derivados D1, D2 e D3 é, respectivamente, igual a 2, 3 e 7 u.m. . A disponibilidade mensal dos recursos é igual a 210 000 barris de crude e 180 000 u.e. de energia.

Pretende-se maximizar o lucro.

* * *

A este problema corresponde a seguinte formulação:

Sejam X, Y e Z as quantidades mensais (em u.vol.) produzidas pela refinaria de D1, D2 e D3, respectivamente.

$$\text{Max } F = 2X + 3Y + 7Z$$

sujeito a

$$4X + 2Y + 6Z \leq 210\,000$$
$$2X + 4Y + 8Z \leq 180\,000$$

$$X, \quad Y, \quad Z \geq 0$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 14 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 3X + 2Y + 5Z$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 6X + 3Y + Z &\leq 340 \\ X + 9Y + 3Z &\leq 170 \\ X, \; Y, \; Z &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 15 -

Considere o problema de Programação Linear seguinte:

$$\text{Max } F = -5X + 10Y - 30Z + 20W$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + 2Y - 3Z + W &\leq 1 \\ -X + Y - 2Z + 4W &\leq 1 \\ X, \; Y, \; Z, \; W &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 16 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 2X + 8Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\leq 10 \\ X + 4Y &\leq 20 \\ X, \; Y &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 17 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 3X + 2Y + 5Z$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y + Z &\leq 100 \\ 4X + Y + 3Z &\leq 200 \\ X, \; Y, \; Z &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 18 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 2X + 5Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\leq 10 \\ X + 2Y &\leq 12 \\ X + 3Y &\leq 15 \\ X, \ Y &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema utilizando o Algoritmo Simplex Primal.

- 19 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{MAX } F = 2X - Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\geq 5 \\ -X + Y &\leq 3 \\ 2X + Y &\leq 8 \\ X, \ Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) A partir da resolução gráfica, identifique a base óptima e utilizando a Formulação Matricial do Simplex, confirme a solução óptima do problema, determinada em a).

- 20 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{MAX } F = X + Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\geq 8 \\ X &\leq 6 \\ Y &\leq 5 \\ X, \ Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) A partir da resolução gráfica, identifique uma s.b.a. <u>não óptima</u> e utilize-a como base inicial do Algoritmo Simplex Revisto para determinar a solução óptima do problema, confirmando o resultado determinado em a).

- 21 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

MAX $F = 3X + Y$

sujeito a

$$\begin{array}{rcl} X & \geq & 1 \\ Y & \geq & 2 \\ X + Y & \leq & 5 \end{array}$$

$$X\ ,\ Y \geq 0$$

a) Resolva-o graficamente.

b) A partir da resolução gráfica, identifique uma s.b.a. <u>não óptima</u> e utilize-a como base inicial do Algoritmo Simplex Revisto para determinar a solução óptima do problema, confirmando o resultado determinado em a).

- 22 -

Calcule todos os vértices do poliedro convexo seguinte:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$X, Y, Z \geq 0 .$$

- 23 -

Considere o seguinte Quadro do Simplex, correspondente a uma solução "intermédia" obtida na resolução de um problema de Programação Linear (cuja função objectivo se pretendia maximizar):

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**TI**
A	1	2/3	0	0	4/3	0	4
D	0	- 7/3	3	1	- 2/3	0	2
F	0	- 2/3	- 2	0	2/3	1	2
G	0	8/3	- 11	0	4/3	0	8

Sabendo que a inversa da matriz dos coeficientes das variáveis básicas a que esta solução corresponde é

$$\mathbf{B^{-1}} = 1/3 \ . \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e que o correspondente vector $\mathbf{C_B}$ é **[** +1 +3 - 1 **]** , formule o problema original.

- 24 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = X + Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2X + Y &\geq 10 \\ X + 2Y &\leq 14 \\ 2X - 2Y &\leq 5 \\ X , Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) Partindo da resolução gráfica, identifique a base correspondente à solução óptima.

c) Recorrendo à formulação matricial do Simplex, obtenha o Quadro do Simplex correspondente à solução óptima.

- 25 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear :

$$\text{MIN } F = -X + 2Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\leq 3 \\ X + 4Y &\geq 4 \\ -X + Y &\leq 0 \\ X , Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) Partindo da resolução gráfica, identifique a base correspondente à solução óptima.

c) Recorrendo à formulação matricial do Simplex, obtenha o Quadro do Simplex correspondente à solução óptima.

- 26 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{MAX } L = 3A - 2B + 4C - 5D$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$A, B, C, D, E, F, G, H \geq 0$.

a) Sabendo que

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = 1/10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ -5 & 10 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

complete o Quadro do Simplex seguinte, correspondente ao problema indicado:

	A	B	C	D	E	F	G	H	TI
A									
E									
C									
F									
L									

b) Classifique, quanto à admissibilidade e optimalidade, a solução correspondente ao Quadro do Simplex anterior.

- 27 -

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$\text{MAX } F = 2X + Y$

sujeito a

$$\begin{array}{rcl} X + Y & \leq & 10 \\ -X + Y & \leq & 3 \\ X + 3Y & \geq & 15 \\ X & \leq & 5 \end{array}$$

$$X \, , \, Y \geq 0$$

a) Resolva o problema recorrendo ao Algoritmo Simplex Revisto, tomando como base inicial (X , Y , F_1 , F_4). Nota: F_i designa a variável de folga associada à i-ésima restrição.

b) Se o coeficiente da variável X na função objectivo puder sofrer variações, para que valores desse coeficiente se manterá óptima a solução determinada na alínea anterior ?

c) Se o coeficiente da variável X na função objectivo for igual a 1 qual a solução do problema ?

d) Relativamente ao problema original, se o termo independente da terceira restrição sofrer um aumento haverá alteração da solução óptima determinada na alínea a) ? Justifique. [Aproveite para esboçar a resolução gráfica deste problema...]

e) Se se introduzir uma nova variável não negativa Z no problema original com coeficiente (+5) na função objectivo e coeficientes 0 , +1 , 0 e +2, respectivamente na 1ª, 2ª, 3ª e 4ª restrição, manter-se-á óptima a solução determinada na alínea a) ? Em caso negativo, determine a nova solução óptima do problema.

f) A introdução da restrição adicional $Y \leq 6$, no problema original altera o correspondente espaço de soluções admissíveis ? E altera a solução óptima determinada na alínea a) ? Justifique.

g) A introdução da restrição adicional $Y \geq 6$, no problema original altera o correspondente espaço de soluções admissíveis ? E altera a solução óptima determinada na alínea a) ? Justifique.

- 28 -

Considere o problema de Programação Linear apresentado no exercício **7**:

$$\text{Max } F = 2X + Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\leq 8 \\ X + Y &\geq 5 \\ -X + Y &\leq 3 \\ X - Y &\leq 3 \\ X, \; Y &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema recorrendo ao Algoritmo Simplex Revisto, tomando como base inicial (X , Y , F_1 , F_3). Nota: F_i designa a variável de folga associada à i-ésima restrição.
Nota: Recorra às inversas das matrizes indicadas a seguir !

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 29 -

Considere o problema de Programação Linear seguinte:

$$\text{Max } F = 3X + 2Y + 5Z$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y + Z &\leq 100 \\ 4X + Y + 3Z &\leq 200 \\ X, \; Y, \; Z &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema, utilizando o Algoritmo Simplex Revisto e tomando (X,Y) como base inicial.

- 30 -

Considere o problema **A** de Programação Linear seguinte:

$$\text{Max } F = -5X + 10Y - 30Z + 20W$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + 2Y - 3Z + W &\leq 1 \\ -X + Y - 2Z + 4W &\leq 1 \end{aligned}$$

$$X, Y, Z, W \geq 0$$

a) Resolva o problema **A** , utilizando o Algoritmo Simplex Revisto e tomando (X,W) como base inicial.

b) Se o coeficiente da variável Y na função objectivo F for variável, para que domínio de variação se manteria a solução óptima determinada na alínea anterior?

- 31 -

Considere o problema de Programação Linear seguinte:

$$\text{Max } F = 3X + 2Y + 5Z$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 6X + 3Y + Z &\leq 340 \\ X + 9Y + 3Z &\leq 170 \end{aligned}$$

$$X, Y, Z \geq 0$$

a) Recorrendo à formulação matricial do Simplex, verifique que a solução óptima do problema é $X^* = 50$; $Y^* = 0$; $Z^* = 40$.

b) Escreva o Quadro do Simplex correspondente à solução óptima do problema.

c) Imagine que em relação ao problema dado se estuda a introdução de uma nova variável não negativa, W , com coeficiente (+4) na função objectivo F e coeficientes (+3) e (+1) na 1ª e 2ª restrição, respectivamente.

Manter-se-ia a solução óptima inicialmente apresentada ? Justifique e, em caso negativo, obtenha a nova solução óptima.

- 32 -

Considere o problema de Programação Linear seguinte:

$$\text{Max } F = 5X + 6Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2X + 3Y &\leq 16 \\ 3X + 2Y &\leq 17 \end{aligned}$$

$$X, Y \geq 0$$

a) Resolva o problema graficamente.

b) A partir da resolução gráfica, determine as variáveis que integram a base óptima e, utilizando a Formulação Matricial do Simplex, confirme a solução óptima determinada na alínea a).

c) Considere que, adicionalmente, X deveria ser inteira. Resolva o problema recorrendo ao Algoritmo Branch and Bound.

d) Resolva o problema recorrendo ao Algoritmo Branch and Bound, considerando que apenas a variável Y deveria ser inteira..

e) Considere que as variáveis X e Y são inteiras. Resolva o problema recorrendo ao Algoritmo Branch and Bound.

f) Compare o valor da função objectivo correspondente às soluções óptimas dos problemas resovidos nas alíneas a), c), d) e e).

PROGRAMAÇÃO LINEAR :

O PROBLEMA DOS TRANSPORTES

O PROBLEMA DE AFECTAÇÃO

- 1 -

Resolva, recorrendo ao Algoritmo dos Transportes o problema correspondente ao seguinte "Quadro dos Transportes":

	F1	F2	F3	
A	3	1	3	50
B	2	9	3	250
C	5	7	2	100
	200	50	150	

NOTA : Utilize a "Regra do Custo Mínimo" para arbitrar a solução inicial.

- 2 -

Resolva, recorrendo ao Algoritmo dos Transportes o problema correspondente ao seguinte "Quadro dos Transportes":

	F1	F2	F3	
A	3	6	7	100
B	8	4	8	150
C	9	5	9	50
	100	100	100	

NOTA : Utilize a "Regra do Custo Mínimo" para arbitrar a solução inicial.

- 3 -

Resolva, em função do parâmetro ($\theta > 0$) o seguinte Problema dos Transportes:

	A	B	
F1	2	5	65
F2	θ	3	100
F3	4	2	85
	100	150	

- 4 -

Resolva, recorrendo ao Algoritmo dos Transportes o problema correspondente ao seguinte "Quadro dos Transportes":

	F1	F2	F3	
A	16	16	8	300
B	14	14	12	200
C	19	18	11	100
	200	200	200	

- 5 -

Resolva, recorrendo ao Algoritmo dos Transportes o problema correspondente ao seguinte "Quadro dos Transportes":

	X	Y	Z	
A	1	2	7	300
B	2	4	9	200
C	3	8	5	100
	300	150	150	

- 6 -

Resolva, recorrendo ao Algoritmo dos Transportes o problema correspondente ao seguinte "Quadro dos Transportes":

	X	Y	Z	
A	5	9	8	10
B	5	1	2	20
C	4	2	3	40
	10	50	10	

Notas: 1) Arbitre a solução inicial utilizando a "Regra do Custo Mínimo"
2) Nunca efectue mais de duas iterações !!!

- 7 -

Resolva, recorrendo ao Algoritmo dos Transportes o problema correspondente ao seguinte "Quadro dos Transportes":

	X	Y	Z	W	
A	[9]	[8]	[5]	[2]	30
B	[6]	[1]	[5]	[4]	80
C	[5]	[5]	[4]	[8]	20
D	[3]	[2]	[9]	[9]	30
	20	60	40	40	

Notas: 1) Arbitre a solução inicial utilizando a "Regra do Custo Mínimo"
2) Nunca efectue mais de duas iterações !!!

- 8 -

Na resolução de um Problema dos Transportes obteve-se o seguinte "Quadro dos Transportes":

	X	Y	Z	W	
A	**20** [2]	**50** [1]	**0** [3]	**0** [4]	70
B	**0** [4]	**0** [8]	**20** [6]	**30** [2]	50
C	**0** [6]	**35** [9]	**15** [5]	**0** [1]	50
	20	85	35	150	170

Estar-se-á perante a solução óptima ? Justifique e, em caso negativo, obtenha-a.

- 9 -

Uma empresa dispõe de três fábricas onde produz dois tipos de produtos A e B. A fábrica 1 produz 100 unidades de A por semana e 150 unidades de B por semana. A fábrica 2 só produz produtos do tipo A (200 unidades por semana). A fábrica 3 só produz produtos do tipo B (50 unidades por semana).

Das três fábricas apenas a fábrica 1 dispõe de capacidade de armazenagem, isto é as fábricas 2 e 3 deverão "escoar" a totalidade da sua produção semanal.

A empresa pretende determinar o plano de distribuição semanal dos produtos A e B a dois grossistas, cujas necessidades são dadas no quadro seguinte.

Produtos	Grossista 1	Grossista 2
A	50	180
B	100	100

Os custos unitários de transporte dos referidos produtos são dados no quadro seguinte (em u.m.).

Fábrica	Produto	Grossista1	Grossista 2
1	A	3	7
1	B	1	4
2	A	2	6
3	B	6	2

a) Elabore o plano óptimo de distribuição semanal que minimiza o custo total de distribuição.

b) Será possível que tal plano óptimo contemple a possibilidade de a fábrica 1 enviar 15 unidades (por semana) de A a cada um dos grossistas ? Justifique.

- 10 -

O treinador de natação de um clube desportivo tem de seleccinar quatro nadadores para representarem o clube na competição nacional de " 4 x 100 m estilos ".

Na referida prova cada equipa é formada por quatro nadadores, devendo cada um nadar 100 m num estilo diferente dos seus colegas de equipa. Interessará, obviamente, minimizar o tempo total obtido pelos quatro nadadores.

O treinador seleccionará os quatro nadadores de entre os cinco melhores, cujos tempos (em segundos) nos diferentes estilos são indicados no quadro seguinte.

	Livres	Bruços	Mariposa	Costas
António	55	67	63	66
Bernardo	62	69	64	68
Carlos	57	71	*	62
Daniel	61	73	61	64
Eduardo	56	68	*	*

Nota (*) : O treinador não considera a hipótese de escolher este nadador para o troço de 100 m deste estilo.

a) Utilizando o Algoritmo dos Transportes, sugira a formação da equipa para a referida prova.

b) Será possível resolver este problema utilizando outro algoritmo ? Em caso afirmativo, utilize-o para confirmar os resultados obtidos na alínea anterior.

- 11 -

Uma empresa está a reciclar o seu pessoal para se adaptar aos "novos desafios da UE". Para tal, levou a cabo cursos de formação relativos a quatro diferentes novas funções a criar na empresa.

Cinco trabalhadores foram submetidos a testes de avaliação relativos às quatro novas funções (A, B, C e D), tendo obtido os resultados (escala 0 : péssimo - 100 : óptimo) seguintes:

Função: Trabalhador:	A	B	C	D
1	95	50	25	85
2	85	55	35	95
3	75	65	50	75
4	*	55	30	20
5	70	*	60	*

Nota (*) : Não se considera a hipótese de este trabalhador poder executar esta função.

a) Utilizando o Algoritmo dos Transportes, sugira a melhor afectação dos trabalhadores às quatro novas funções.

b) Será possível resolver este problema utilizando outro algoritmo ? Em caso afirmativo, utilize-o para confirmar os resultados obtidos na alínea anterior.

- 12 -

O responsável pelo sector de abastecimento de uma cadeia de supermercados está a estudar o aprovisionamento para a próxima semana de um determinado artigo para quatro supermercados S1, S2, S3 e S4. Tal artigo poderá ser comprado a dois fornecedores A e B.

Relativamente à próxima semana pretende-se que S1, S2, S3 e S4 recebam, respectivamente, 150, 100, 80 e 100 unidades do referido artigo. Os fornecedores A e B, no entanto, só podem assegurar o envio de, respectivamente, 150 e 250 unidades.

O responsável pelo abastecimento decidiu que S2 deverá ser abastecido obrigatoriamente na totalidade das suas necessidades (100 unidades). Por outro lado, decidiu ainda não efectuar transportes cujo custo ultrapasse 100 u.m./unidade .

São conhecidos os dados seguintes:

Distâncias (km)				
De: Para:	S1	S2	S3	S4
A	15	5	12	8
B	8	10	16	9

Custo de Transporte	
Origem:	(u.m./(km.unidade))
A	8
B	9

Determine o plano de transporte que minimiza o Custo Total de Transporte do referido artigo na próxima semana.

- 13 -

Uma empresa fornecedora de um determinado tipo de artigo dispõe de duas filiais A e B (com capacidade de oferta igual a 200 e 300 unid. / semana , respectivamente) que abastecem três clientes X, Y e Z (cujas necessidades são iguais a 200, 300 e 100 unid. /semana, respectivamente). A empresa comprometeu-se a satisfazer obrigatoriamente as necessidades semanais do cliente Z.

Conhece-se a "Matriz de Distâncias" (em km) seguinte:

D_{ij}	X	Y	Z
A	10	15	7
B	8	16	22

Sabe-se que a empresa fornecedora não efectua transportes correspondentes a distâncias superiores a 20 km e que estima o lucro unitário de transporte de acordo com a expressão

$L_{ij} = 100 - 4 \cdot D_{ij}$ (com D_{ij} em km e L_{ij} em u.m.)

Determine o esquema de transporte que maximiza o lucro da empresa fornecedora.

- 14 -

Uma importante empresa de projectos dispõe de três "polos" (gabinetes): o "polo-sede" em Lisboa e os "polos" de Coimbra e Porto.

O Director-Geral da empresa está a estudar a possibilidade de a empresa se candidatar a alguns projectos internacionais, estando actualmente em análise os projectos A, B, C, D e E.

A tabela seguinte indica o valor do lucro (u.m.) que a empresa pode obter, em função do projecto e do "polo" encarregado de o desenvolver.

	A	B	C	D	E
Lisboa	20	12	15	12	18
Porto	8	13	12	15	12
Coimbra	10	15	7	(*)	10

Nota (*): Não é possível, por razões técnicas, que o "polo" de Coimbra concorra ao projecto D.

O Director-Geral decidiu autorizar que o "polo-sede" se candidate a dois projectos e que cada um dos outros dois "polos" se candidate apenas a um projecto.

Pretende-se saber a que projecto(s) se deve(m) candidatar os três "polos" da empresa.

a) Obtenha uma solução óptima para o problema, recorrendo ao Algoritmo dos Transportes.

b) Será possível resolver este problema utilizando outro algoritmo ? Em caso afirmativo, utilize-o para confirmar os resultados obtidos na alínea anterior.

- 15 -

Uma empresa multinacional está a estudar a distribuição de um produto fabricado nas suas 4 fábricas (A, B, C e D) em 4 países P1, P2, P3 e P4.

O lucro unitário associado a venda da cada produto em cada país é dado na tabela seguinte (em u.m.).

	A	B	C	D	Procura Mensal
P1	44	38	40	42	320
P2	33	50	36	35	240
P3	45	40	*	31	340
P4	32	*	43	40	100
Capacidade de Produção Mensal	200	400	150	250	1000

Nota (*) : Não é possível efectuar a distribuição do produto desta fábrica para este país.

Utilizando o Algoritmo dos Transportes, determine o plano de distribuição que maximiza o lucro da empresa.

- 16 -

A SELECTA é uma empresa que selecciona pessoal para outras empresas. De momento a SELECTA está a analisar seis candidatos destinados a quatro vagas. Os referidos candidatos prestaram provas de aptidão para as quatro vagas tendo obtido os seguintes resultados na escala [0,100] (0 - péssimo ; 100 - óptimo) :

Candidato→ Vaga↓	A	B	C	D	E	F
1	10	20	50	75	3	10
2	30	51	92	84	45	1
3	5	64	30	52	39	72
4	68	9	71	4	5	23

Sabe-se que a SELECTA considera que:

i) Qualquer candidato com menos de 10 pontos numa determinada prova de aptidão está automaticamente excluído da vaga correspondente.

ii) Qualquer candidato com menos de 10 pontos em mais de uma prova de aptidão é automaticamente excluído de todas as vagas.

Obtenha uma solução óptima para o problema, recorrendo ao Algoritmo dos Transportes. indique qual a decisão a tomar pela SELECTA, utilizando o Algoritmo dos Transportes.

a) Recorrendo ao Algoritmo dos Transportes, determine qual a decisão a tomar pela SELECTA.

b) Será possível resolver este problema utilizando outro algoritmo ? Em caso afirmativo, utilize-o para confirmar os resultados obtidos na alínea anterior.

PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA:

O ALGORITMO ‘BRANCH AND BOUND’

- 1 –

Considere o seguinte problema de PLI:

Minimizar $F = 2X + 3Y$

sujeito a

$$X + Y \geq 3$$
$$X + 3Y \geq 6$$

$$X, Y \geq 0 \text{ e inteiras}$$

Resolva o problema, utilizando o Algoritmo 'Branch and Bound'.

Nota: para cada subproblema, resolva graficamente a sua relaxação.

(Hillier e Lieberman)

- 2 –

Considere o seguinte problema de PLI:

Maximizar $F = 3X + 2Y + 1Z$

sujeito a:

$$1X + 1Y + 3Z \leq 150$$
$$1X + 1Y - 1Z \leq 100$$
$$3X - 1Y + 1Z \leq 100$$

$$X, Y, Z \geq 0 \text{ e inteiros.}$$

À Relaxação Linear deste problema corresponde o seguinte quadro óptimo do Simplex:

	X	Y	Z	F1	F2	F3	
X	1	0	0	0	1/4	1/4	50
Y	0	1	0	1/4	2/4	-2/4	62,5
Z	0	0	1	2/4	-2/4	0	12,5
F	0	0	0	3/4	6/4	1/4	287,5

Resolva o problema, utilizando o Algoritmo 'Branch and Bound'.

Nota: Poderá recorrer a http://www.programacionlineal.net/simplex.html

- 3 – Considere o seguinte problema de PLI:

Maximizar F = 5 X + 4 Y + 4 Z + 2 V

sujeito a

$$1\,X + 3\,Y + 2\,Z + 1\,V \leq 10$$
$$5\,X + 1\,Y + 3\,Z + 2\,V \leq 15$$
$$1\,X + 1\,Y + 1\,Z + 1\,V \leq 6$$

X, Y, Z, V ≥ 0 e X, Y, Z inteiras

Resolva o problema, utilizando o Algoritmo 'Branch and Bound'.

(Hillier e Lieberman)

- 4 – Considere o seguinte problema de PLI:

Maximizar F = 2 X - 1 Y + 5 Z – 3 U + 4 V

sujeito a

$$3\,X - 2\,Y + 7\,Z - 5\,U + 4\,V \leq 6$$
$$1\,X - 1\,Y + 2\,Z - 4\,U + 2\,V \leq 0$$

X, Y, Z, U, V binárias

Resolva o problema, utilizando o Algoritmo 'Branch and Bound'.

(Hillier e Lieberman)

- 5 –

Considere o problema de PLI seguinte:

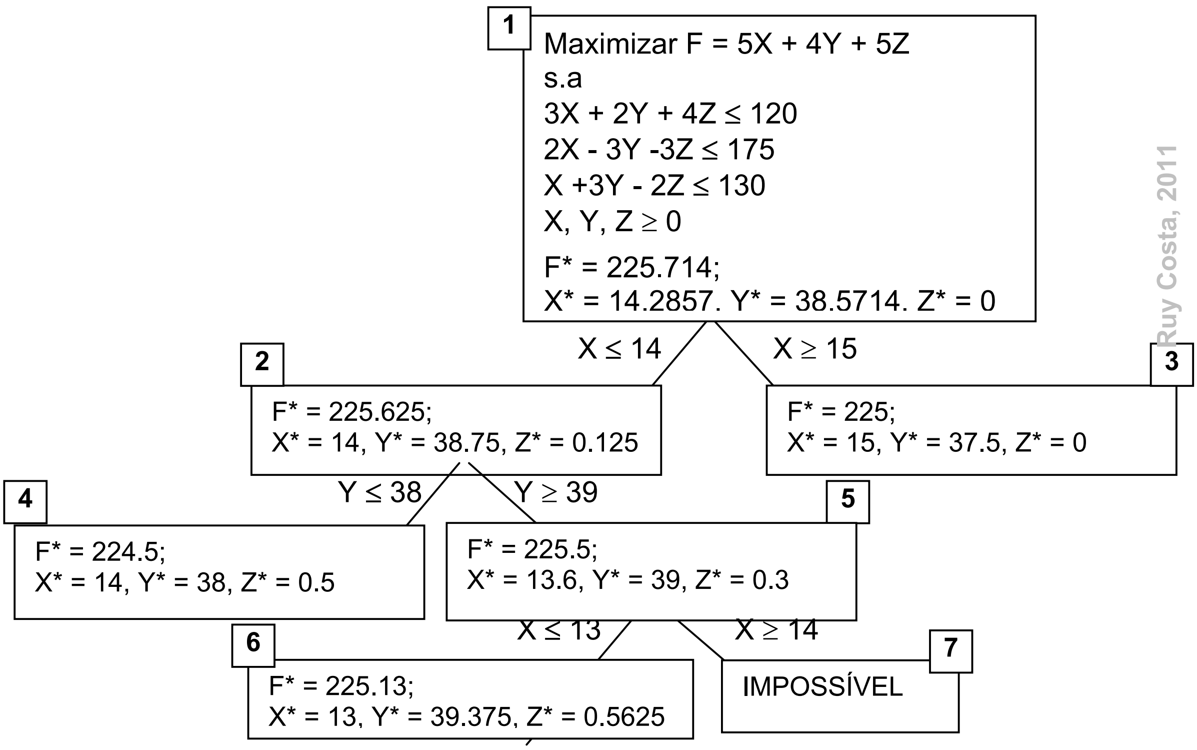
Maximizar F = 5X + 4Y + 5Z

sujeito a

$$3X + 2Y + 4Z \leq 120$$
$$2X - 3Y - 3Z \leq 175$$
$$X + 3Y - 2Z \leq 130$$

X, Y, Z ≥ 0 e inteiras

e o início da correspondente resolução pelo Algoritmo Branch and Bound:



Relativamente ao sub-problema **3** esquematizado, apresenta-se, na folha seguinte, o Quadro do Simplex correspondente à respectiva solução óptima.

Probl.3	X	Y	Z	F1	F2	F3	F4		TI
Y	0	1	2	1/2	0	0	3/2		75/2
F2	0	0	3	3/2	1	0	13/2		515/2
F3	0	0	-8	-3/2	0	1	-7/2		5/2
X	1	0	0	0	0	0	-1		15
F	0	0	3	2	0	0	1		225

a) Indique, justificando sucintamente, um limite superior para o valor óptimo de F.

b) Admita que pode ramificar apenas **um** dos subproblemas. Indique que subproblema escolheria para ramificar e qual(ais) a(s) nova(s) restrição(ões) que seria(m) utilizada(s) para proceder à ramificação. Justifique sucintamente.

c) Ramifique o subproblema **3**. **Resolva apenas O novo subproblema resultante da introdução de uma restrição de tipo ≤, utilizando os quadros do Simplex disponíveis na folha anexa** e analise a solução obtida.

- 6 –

Considere o problema de PLI seguinte:

Maximizar $F = 3X + 2Y + Z + 4W$
sujeito a

$$X + Y + Z + W \leq 40$$
$$2X + Y - Z - 2W \geq 10$$
$$X - Y + 2W \geq 10$$
$$X, Y, Z, W \geq 0 \text{ e inteiras}$$

e o início da correspondente resolução pelo Algoritmo Branch and Bound:

1

Maximizar $F = 3X + 2Y + Z + 4W$
s.a
$X + Y + Z + W \leq 40$
$2X + Y - Z - 2W \geq 10$
$X - Y + 2W \geq 10$
$X, Y, Z, W \geq 0$

$F^* = 137.5$;
$X^* = 22.5$. $Y^* = 0$. $Z^* = 0$. $W^* = 17.5$

2

3

Maximizar $F = 3X + 2Y + Z + 4W$
s.a
$X + Y + Z + W \leq 40$
$2X + Y - Z - 2W \geq 10$
$X - Y + 2W \geq 10$
$X \geq 23$
$X, Y, Z, W \geq 0$

Sendo F_i a variável de folga da i-ésima restrição, considere o Quadro do Simplex óptimo da correspondente relaxação linear:

Prob. 1	X	Y	Z	W	F1	F2	F3	TI
F3	0	9/4	7/4	0	6/4	1/4	1	190/4
X	1	3/4	1/4	0	2/4	-1/4	0	90/4
W	0	1/4	3/4	1	2/4	1/4	0	70/4
F	0	5/4	11/4	0	14/4	1/4	0	550/4

Sabe-se que o problema de PLI possui uma única solução óptima.

a) Determine a solução óptima do problema **3**, a partir do Quadro do Simplex fornecido.

b) A que conclusões pode chegar face à resolução do problema **3** ?

c) Explicite o enunciado do problema **2** e resolva-o, se necessário. Justifique a sua opção.

TEORIA DA DECISÃO

- 1 -

O responsável pelo Gabinete de Relações Públicas (G.R.P.) de uma grande empresa está a preparar um "cocktail" de promoção da sua empresa, que decorrerá nos jardins da nova sede da empresa.

Neste momento o responsável pelo G.R.P. tem que decidir se manda, ou não, instalar toldos nos jardins.

Sabe-se que o responsável pelo G.R.P. receberá um prémio pecuniário, P (em u.m.), que dependerá do "sucesso" com que decorrer o "cocktail". Esse sucesso é função da decisão a tomar relativamente à montagem dos toldos e das condições meteorológicas que se venham a fazer sentir na noite em que decorrer o "cocktail". Tendo em conta os factores referidos foi possível elaborar a seguinte tabela:

Prémio (**D** , θ) (u.m.)		Condições Atmosféricas (θ)		
		Mau tempo	Tempo Instável	Bom Tempo
Decisões (**D**)	A : Montar os toldos	25	20	5
	B: Não montar os toldos	0	10	20

a) Que decisão recomendaria ao responsável pelo G.R.P. ?

b) Admita que se prevê que, com 25 % de probabilidade o tempo estará mau na noite em que se realiza o "cocktail", e que com 45 % e 30 % de probabilidade, respectivamente, o tempo estará instável e bom.

Nestas circunstâncias que decisão recomendaria ?

c) Admita que o responsável pelo G.R.P. não reage "linearmente" relativamente ao prémio a receber (com efeito, o prémio pode ser um indicador interessante sobre uma futura promoção na empresa...).

Admita que a "Curva de Utilidade" que caracteriza o responsável pelo G.R.P. relativamente ao Prémio P (em u.m.) é definida do modo seguinte:

$$U = \begin{cases} -1 & ; \quad P < 0 \\ 0{,}1\ P - 1 & ; \quad 0 \leq P < 20 \\ 10\ P - 199 & ; \quad 20 \leq P < 30 \\ 101 & ; \quad P \geq 30 \end{cases}$$

Nota: P (u.m.) ; U (util.)

Nestas circunstâncias que decisão recomendaria ?

- 2 -

Considere a seguinte Matriz de Utilidades, associada a diferentes decisões e diferentes estados da natureza:

U (D ; θ)	θ1	θ2	θ3
D1	4	6	1
D2	5	2	3
D3	4	5	3
D4	3	4	2

a) Que decisão recomendaria, com base na "Matriz de Utilidades" ?

b) Determine a "Matriz de Custos de Oportunidade".

c) Que decisão recomendaria, com base na "Matriz de Custos de Oportunidade" ?

- 3 -

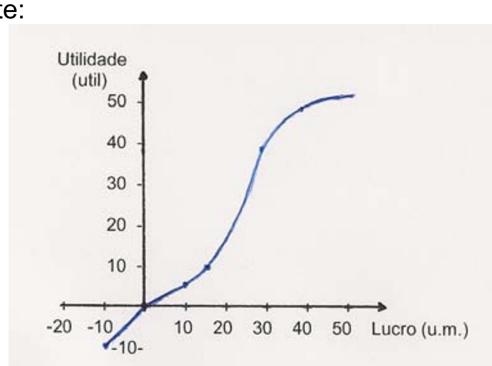
Um gestor tem que decidir entre comprar uma nova empresa, ou, alternativamente, investir o capital disponível.

No quadro seguinte são indicados os valores de lucro esperado (em u.m.) no final de cinco anos, em função da situação económica mundial.

	Situação Económica Mundial		
Decisão :	Recessão	Instável	Boa
Compra a nova empresa	-10	5	35
Não compra a empresa / / investe o capital	10	12	15

a) Se não dispusesse de qualquer outra informação, qual a decisão que recomendaria ao gestor ? Justifique.

b) Responda à questão anterior, assumindo que a "Curva de Utilidade" do gestor tem o aspecto seguinte:



c) Admita que se estima em 25 % a probabilidade de ocorrência de uma recessão económica, em 55 % a probabilidade de ocorrência de uma situação económica instável e em 20 % a probabilidade de ocorrência de uma boa situação económica.

Que decisão recomendaria ao gestor ?

Nota: Responda a esta questão baseando-se
i) nos valores de lucro esperado
ii) nos valores de lucro esperado e na "Curva de Utilidade".

- 4 -

Um agente de decisão tem de optar por uma decisão (**D**) de entre três alternativas A, B ou C.

O lucro (em u.m.) que o agente de decisão obterá será função da decisão tomada e do "estado da natureza" θ que vier a ocorrer, de acordo com o quadro seguinte :

L (**D** ; θ)		θ			
		θ1	θ2	θ3	θ4
D	A	10	7	13	8
	B	8	8	9	9
	C	2	5	17	13

a) Analise esta situação e, para cada decisão, escolha uma frase adequada, a partir dos elementos abaixo indicados, justificando a sua escolha.

É preciso ser claramente ------------------------------------- Basta ser moderadamente	optimista ------------------ pessimista	para tomar a decisão	A B C

b) Imagine que se sabe que a probabilidade de ocorrência do estado $\theta 1$ é igual a 20 % e que a probabilidade de ocorrência do estado $\theta 2$ é igual a 0,3.

Nestas condições, como analisaria o problema ?

c) Sabe-se que a Curva de Utilidade correspondente ao agente de decisão é dada por:

$$U = \begin{cases} 0 & ; \quad L < 0 \\ 0{,}1\ L & ; \quad 0 \leq L < 7 \\ 0{,}7 + 49{,}3\ (\ L - 7\ ) & ; \quad 7 \leq L < 9 \\ 99{,}3 + 0{,}1\ (\ L - 9\ ) & ; \quad 9 \leq L < 16 \\ 100 & ; \quad L \geq 16 \end{cases}$$

Nota: L (u.m.) ; U (util.)

c1) Interprete sucintamente o significado de tal curva.

c2) Se não conhecer a probabilidade de ocorrência de qualquer dos estados da natureza, qual a decisão que aconselharia a este agente de decisão ? Justifique.

- 5 -

Considere uma "situação de risco" caracterizada pela seguinte tabela de custos (em u.m.) associados aos diferentes estados da natureza ($\theta 1$, com30 % de probabilidade de ocorrência e $\theta 2$, com 70 % de probabilidade de ocorrência) e decisões (A, B e C).

C (**D** ; θ)		θ	
		$\theta 1$	$\theta 2$
D	A	15	17
	B	22	15
	C	10	25

a) Qual a decisão que recomenda ? Justifique.

b) Considere um agente de decisão cuja Curva de Utilidade é dada por:

$$U = \begin{cases} 50 - 0{,}05\ C & ; \quad 0 \le C < 20 \\ 49 - 48\ (\ C - 20\ ) & ; \quad 20 \le C < 21 \\ 1 - 0{,}05\ (\ C - 21\ ) & ; \quad 21 \le C < 41 \\ 0 & ; \quad C \ge 41 \end{cases}$$

Nota : C (u.m.) ; U (util.)

Interprete o significado desta curva.

c) Se ao agente de decisão cuja Curva de Utilidade foi apresentada na alínea b) for posto o problema da alínea a) que decisão será tomada ? Justifique.

- 6 -

O responsável pelo sector de Marketing de uma grande empresa está a planear a sua representação na EXPO2018.

Estão a ser estudadas três hipóteses de representação: "Pavilhão Grande", "Pavilhão Médio" e "Pavilhão Pequeno", a que correspondem, respectivamente, os custos 100 u.m., 70 u.m. e 50 u.m. .

O número de novos clientes captados pela empresa é função do tipo de representação adoptado, bem como do sucesso que a EXPO2018 vier a ter - veja-se o Quadro seguinte:

Número de novos clientes captados			
Tipo de Pavilhão	Grau de sucesso da EXPO2018		
	Grande Sucesso	Sucesso	Insucesso
Pavilhão Grande	100 000	70 000	30 000
Pavilhão Médio	80 000	50 000	20 000
Pavilhão Pequeno	50 000	20 000	10 000

O responsável pelo sector de Marketing considera que a satisfação da empresa tem duas parcelas aditivas - a relativa ao investimento a fazer e a relativa ao número de novos clientes captados.

Relativamente ao investimento, foi estabelecido que os custos de 100 u.m., 70 u.m. e 50 u.m. correspondem, respectivamente, a 50 unidades de satisfação (u.s.), 90 u.s. e 100 u.s. .

Relativamente ao número de novos clientes captados (N) admite-se que a satisfação seja dada por

$$\left[\frac{N}{10000}\right]^2 \quad \text{(em u.s.)}$$

a) Qual a decisão que recomendaria relativamente ao tipo de representação na EXPO2018 ? Justifique.

b) Como classificaria uma agente de decisão que optasse por uma das duas decisões "não recomendadas" na alínea a) ?

- 7 -

O gestor de uma empresa de transportes tem que tomar uma decisão relativamente à frota da sua empresa: ou procede à sua renovação de imediato (com um custo de 100 u.m.), ou daqui a um ano, ou, o mais tardar, daqui a dois anos.

Se não se efectuar a renovação de imediato, o gestor investirá as 100 u.m., estimando-se em 20 % a taxa anual de rentabilidade do investimento.

Daqui a um ano o gestor poderá voltar a ponderar sobre a oportunidade de renovar ou não a frota. Caso opte por não renovar a frota nessa altura, voltará a investir a totalidade dos recursos financeiros então disponíveis, admitindo-se novamente uma taxa de rentabilidade anual de 20 %.

Caso não tenha sido efectuada anteriormente, daqui a dois anos o gestor deverá efectuar obrigatoriamente a renovação da frota.

Em cada ano o custo da renovação (actualmente estimado em 100 u.m.), poderá

* subir muito (**SM**) , isto é, aumentar 35 % ,
* subir (**S**) , isto é, aumentar 10 % ,
* manter-se (**M**) ,
ou * descer (**D**) , isto é, diminuir 5 % .

a) Elabore a "Árvore de Decisão" correspondente a este problema.

Nota: Na pag. 56 dispõe de um esquema que o poderá ajudar.

b) Discuta a decisão a tomar de imediato, em situação de incerteza.

c) Determine qual a melhor decisão a tomar de imediato admitindo que a variação do custo da renovação é dada no quadro seguinte:

Nota: t designa a actualidade; t+i designa o futuro daqui a i anos

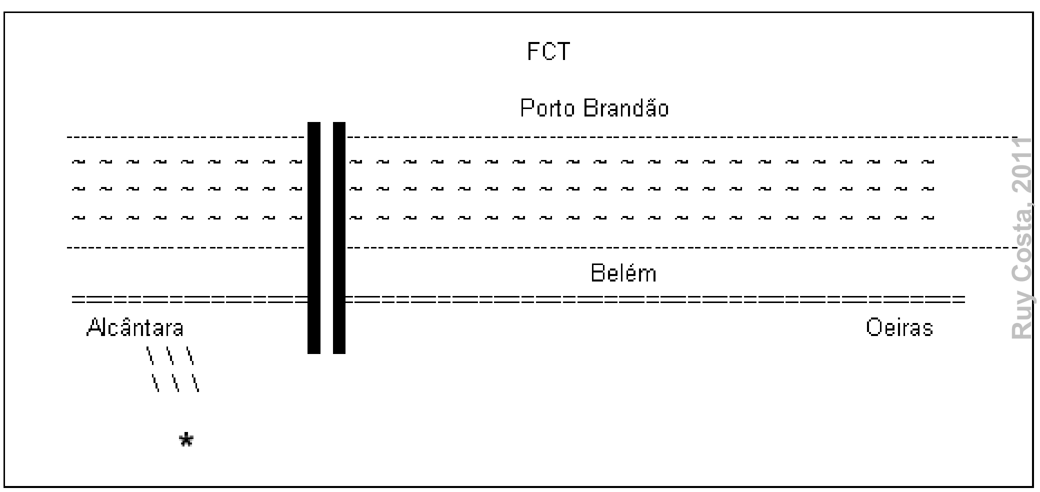
Variação t $\rightarrow$ t + 1	Variação t + 1 $\rightarrow$ t + 2
P (SM) = 10 %	P (SM) = 30 % P (S) = 20 % P (M) = 40 % P (D) = 10 %
P (S) = 45 %	P (SM) = 25 % P (S) = 50 % P (M) = 15 % P (D) = 10 %
P (M) = 35 %	P (SM) = 10 % P (S) = 15 % P (M) = 50 % P (D) = 25 %
P (D) = 10 %	P (SM) = 5 % P (S) = 10 % P (M) = 50 % P (D) = 35 %

d) Determine a decisão a tomar de imediato, admitindo que se mantêm válidos os dados da alínea anterior e que, adicionalmente, a taxa anual de rentabilidade pode variar de acordo com o quadro seguinte:

Variação t $\rightarrow$ t + 1	Variação t + 1 $\rightarrow$ t + 2
P (taxa = 20 %) = 75 %	P (taxa = 20 %) = 90 % P (taxa = 15 %) = 10 %
P (taxa = 15 %) = 25 %	P (taxa = 20 %) = 30 % P (taxa = 15 %) = 70 %

- 8 -

O Luís chega pontualmente à estação da CP em Oeiras às 7:48 horas, para apanhar o comboio a caminho da FCT-UNL no Monte de Caparica.



Às 7:50 horas passa o "comboio rápido" que normalmente demora 15 minutos até chegar a Alcântara. Às 7:52 horas parte o "comboio que pára em todas as estações" que normalmente demora 17 minutos até Belém. (De notar que o "comboio rápido" não pára em Belém).

Sabe-se que com 80 % de probabilidade os comboios não sofrem qualquer atraso, que com 15 % de probabilidade sofrem um atraso de 10 minutos e que com 5 % de probabilidade sofrem um atraso de 20 minutos.

Em Alcântara o Luís deslocar-se-á na moderna passadeira rolante da estação da CP até à paragem do autocarro (assinalada com * no esquema), demorando 5 minutos nesse trajecto. Nessa paragem poderá apanhar um autocarro às 8:11 , 8:26 e 8:41 horas. O trajecto do autocarro até ao Monte de Caparica / FCT normalmente demora 20 minutos, mas poderá sofrer atrasos.

Sabe-se que com 20 % de probabilidade os autocarros não sofrem qualquer atraso, que com 50 % de probabilidade sofrem um atraso de 15 minutos e que com 30 % de probabilidade sofrem um atraso de 30 minutos.

Em Belém o Luís poderá apanhar o barco das 8:30 horas para Porto Brandão, aonde chega às 8:40 horas. Daí partirá o autocarro às 8:45 horas, que o deixará na FCT às 8:55 horas. Admite-se que o percurso "Belém → Porto Brandão → FCT" nunca origina atrasos.

a) Qual a opção que recomenda ao Luís relativamente ao comboio a apanhar em Oeiras, se se pretendesse minimizar a duração esperada do percurso "Oeiras → FCT" ? Justifique.

b) Qual a opção que recomenda ao Luís relativamente ao comboio a apanhar em Oeiras, se se pretendesse garantir a sua chegada à FCT até às 9:00 horas ? Justifique.

- 9 -

O Primeiro-Ministro (PM) daquele país europeu precisava de decidir se apoiaria ou não a realização de um referendo sobre a ratificação de um importante tratado internacional.

O Conselho de Ministros restrito está reunido para analisar a questão.

- "Se V.Exa. apoiar a realização do referendo, estima-se em 60 % a probabilidade de o tratado vir a ser ratificado.", diz o Ministro A.

- "E se não apoiar a realização desse referendo ?", perguntou o PM, "O que pode acontecer ?"

-"Bem, já se sabe que S.Exa. o senhor Presidente da República (PR) tem uma opinião divergente ...", lembrou o Ministro B.

- "Sim, sim. Nessas circunstâncias , com 80 % de probabilidade o PR fará um discurso muito negativo para o Governo ...", disse o Ministro A.

- "E se tal acontecer é preciso pensar se V.Exa., senhor PM, lhe deverá responder ...", lembrou o Ministro C.

- "Bom, admitamos que eu não apoio a realização do referendo, que o PR faz o discurso negativo e que eu lhe respondo ! Nestas circunstâncias, qual a probabilidade de o tratado vir a ser ratificado ?", perguntou o PM ao Ministro A, o seu "braço direito".

- "85 %", respondeu o Ministro A prontamente, acrescentando: "e se V.Exa. não apoiar a realização do referendo, o PR fizer o discurso e V.Exa. decidir não responder, estima-se em 80% a probabilidade de ser ratificado”.

- "Atenção ! Convém não nos esquecermos de uma outra possibilidade: V.Exa. não apoia a realização do referendo e o PR não faz qualquer discurso ...", lembrou o Ministro C.

- "Sim ! E nessas circunstâncias o tratado será ratificado com 95 % de probabilidade ! ", acrescentou de imediato o ministro A.

- "De acordo com conversas anteriores V.Exa. já pontuou com + 100 u.s. (unidades de satisfação) a ratificação do tratado e com - 100 u.s. a sua não ratificação.", disse o Ministro C ao PM.

- "Sim, é verdade. E também já lhes confessei que um discurso negativo do PR vale, para mim, - 30 u.s. " , respondeu o PM, continuando, "Quanto à necessidade de eu ter de responder a um eventual discurso do PR atribuo - 15 u.s. . Finalmente é bom não esquecermos que a realização do referendo gera alguma instabilidade política, pelo que lhe atribuo - 20 u.s. ."

Seguiu-se um minuto de profundo silêncio.

- "Parece-me que V.Exa. deveria optar por não apoiar a realização do referendo.", disse o Ministro B, quebrando o silêncio.

- "Para quem esteve tanto tempo em silêncio, chegou a uma decisão muito rapidamente, senhor Ministro B ! ", disse o PM meio incomodado. "Não se importa de nos justificar a sua decisão ? "

Concorda com a decisão proposta pelo Ministro B ? Justifique.

- 10 -

Um casal está a ponderar a "troca" de apartamento.

O seu apartamento actual está avaliado em cerca de 10 000 u.m. e as suas poupanças cifram-se em 3 500 u.m..

Se o seu apartamento for vendido já poder-se-á conseguir obter 9 000, 10 000 ou 10 500 u.m., respectivamente, com 10 %, 80 % e 10 % de probabilidade.

O casal está interessado em adquirir um apartamento T4 (actualmente à venda por 15000 u.m.), ou um apartamento T5 (actualmente à venda por 17 000 u.m.).

Se a "troca" não for realizada já, sê-lo-á obrigatoriamente dentro de um ano.

Nessa altura, as suas economias terão rendido 500 u.m. após um ano de investimento e prevê-se, que com 35 % de probabilidade, o mercado imobiliário esteja então em recessão.

Se dentro de um ano o mercado imobiliário estiver em recessão, com 20 % de probabilidade a venda do actual apartamento do casal poderá render 9 500 u.m. e a aquisição do apartamento T4 (T5) poderá ser feita por 15 000 (16 500) u.m. ; com 80 % de probabilidade seria possível vender o actual apartamento do casal por 10 000 u.m. e adquirir o apartamento T4 (T5) por 16 500 (17 500) u.m.. (ver Quadro abaixo)

Se dentro de um ano o mercado imobiliário não estiver em recessão (o que se prevê que possa ocorrer com 65 % de probabilidade), com 40 % de probabilidade seria possível vender o actual apartamento do casal por 11 000 u.m. e adquirir o apartamento T4 (T5) por 16 500 (18 000) u.m. ; com 60 % de probabilidade seria possível vender o actual apartamento do casal por 11 500 u.m. e adquirir o apartamento T4 (T5) por 17 500 (19 500) u.m.. (ver Quadro abaixo)

Situação do mercado imobiliário	Probabilidade	Receita resultante da venda do apartamento actual (u.m.)	Custo de um novo apartamento (u.m.)	
			T4	T5
Recessão	20 %	9 500	15 000	16 500
	80 %	10 000	16 500	17 500
Não Recessão	40 %	11 000	16 500	18 000
	60 %	11 500	17 500	19 500

A aquisição de um apartamento T4 traduz-se em 40 unidades de satisfação (u.s.) para o referido casal; a aquisição de um apartamento T5 corresponde a 100 u.s. .

A necessidade de contrair um empréstimo é contemplada pelo casal. A sua satisfação, para além da parcela relativa ao tipo de apartamento a adquirir, tem uma parcela $S_{emp.}$ relativa ao valor do empréstimo a contrair. Esta última parcela obviamente diminui com o aumento do valor do empréstimo a contrair V (em u.m.) de acordo com

$$S_{emp.} = \begin{cases} 100 & ; \quad V = 0 \\ 100 - 0{,}01 \times V & ; \quad 0 < V \leq 3000 \\ 220 - 0{,}05 \times V & ; \quad 3\,000 < V \leq 4\,400 \\ 0 & ; \quad V > 4\,400 \end{cases}$$

Nota: $S_{emp.}$ (u.s.) ; V (u.m.)

Qual a decisão a tomar de imediato que recomendaria a este casal ? Justifique.

- 11 -

Um gestor tem de proceder à compra de um novo veículo para a sua empresa. Essa compra deverá ser feita de imediato, daqui a um ano, ou, o mais tardar, daqui a dois anos. Para tal o gestor dispõe actualmente de 3000 u.m. .

O gestor pretende adquirir um veículo ou da marca A, ou da marca B. Este gestor prefere claramente a marca B, e sempre que possível (isto é, sempre que o capital disponível o permita) optará por um veículo B .

O gestor decidiu comprar o veículo a pronto pagamento.

Actualmente os preços dos veículos A e B são respectivamente iguais a 3000 u.m. e 3300 u.m. (o que inviabiliza a compra imediata de um veículo da marca B...) .

Assim, o gestor deverá decidir comprar já um veículo A, ou aguardar um ano (investindo as 3000 u.m. por um ano - investimento que rende 400 u.m.) e efectuar a compra em 1994, ou aguardar até 1995 (investindo as 3000 u.m. durante dois anos - um investimento que com 80 % de probabilidade renderá 700 u.m. e com 20 % de probabilidade renderá 800 u.m.).

O quadro seguinte indica os preços dos veículos actualmente praticados, e os valores previsíveis no prazo de um ano e de dois anos.

Tempo :	Presente	Próximo ano		Daqui a dois anos	
Marca	Valor	Valor	Probabilidade	Valor	Probabilidade
A	3 000	3 100	90 %	(*)	
		3 200	10 %		
B	3 300	3 400	80 %	3 450	70 %
				3 550	30 %
		3 500	20 %	3 600	50 %
				3 700	50 %

NOTAS: 1 - (*) Sabe-se que daqui a dois anos a aquisição de um veículo da marca A já não interessará ao gestor.

2 - Os valores dos preços indicados são em u.m. .

A satisfação do gestor (expressa em unidades de satisfação - u.s.) é devida a três factores:

i) a marca do veículo adquirido :

A $\rightarrow$ 10 u.s.

B	$\rightarrow$	20 u.s.

ii) o capital disponível daqui a dois anos, após a aquisição do veículo (se o veículo for adquirido já ou no próximo ano; admita uma taxa de rentabilidade anual de 10 % para o capital disponível após a aquisição). Seja C (u.m.) o capital disponível daqui a dois anos após a aquisição do veículo. A satisfação daí decorrente (em u.s.) será igual a 0,05 x C (em u.s.) .

iii) a altura em que é feita a aquisição:

presente	$\rightarrow$	15 u.s.
próximo ano	$\rightarrow$	10 u.s.
daqui a 2 anos	$\rightarrow$	20 u.s.

a) Que "decisão imediata" recomenda ao gestor ? Justifique.

b) Imagine que a "satisfação do gestor relativa à altura em que é feita a aquisição" sofria uma ligeira alteração:

presente	$\rightarrow$	15 u.s.
próximo ano	$\rightarrow$	10 u.s.
daqui a 2 anos	$\rightarrow$	θ (em u.s.)

Para que valores de θ se manteria a sua resposta à alínea a) ?

- 12 -

Os alunos finalistas do curso de Matemática da FCT-UNL organizaram um jogo aleatório para angariarem fundos para a "viagem de fim de curso".

Cada jogador paga uma quantia Q (em escudos) e tem de optar entre o Jogo A e o Jogo B seguintes:

JOGO A :

De uma urna com bolas brancas, negras e vermelhas é extraída aleatoriamente uma bola, sendo observada a sua cor.

* Se se tratar de uma bola branca, o jogo termina de imediato, sem qualquer prémio.
* Se se tratar de uma bola negra, o jogador pode optar por
- receber 1 000 $ 00 e terminar o jogo,

ou - nada receber e proceder a nova extracção aleatória.

* Se se tratar de uma bola vermelha,o jogador pode optar por
- receber 5 000 $ 00 e terminar o jogo,

ou - nada receber e proceder a nova extracção aleatória.

Na eventual segunda extracção aleatória (que só é realizada após a introdução na urna da bola observada na 1ª extracção), se for observada uma bola de cor

* branca,o jogador nada recebe
* negra, o jogador recebe 2 000 $
* vermelha, o jogador recebe 10 000 $

JOGO B :

De uma urna com bolas amarelas e roxas é extraída aleatoriamente uma bola, sendo observada a sua cor.

* Se se tratar de uma bola amarela, o jogador pode optar por
- receber 1 000 $ 00 e terminar o jogo

ou - nada receber e proceder a nova extracção aleatória.

* Se se tratar de uma bola roxa, o jogador pode optar por
- receber 3 000 $ 00 e terminar o jogo

ou - nada receber e proceder a nova extracção aleatória.

Na eventual segunda extracção aleatória (que só é realizada após a introdução na urna da bola observada na 1ª extracção), se for observada uma bola de cor igual à da 1ª extracção o prémio será duplo do que se receberia na 1ª extracção (isto é, se nas duas extracções se observar amarelo, o jogador receberá 2 000 $; se nas duas extracções se observar roxo, o jogador receberá 6 000 $). Se nas duas extracções se observarem cores diferentes o jogador nada recebe.

Note-se que quer o JOGO A, quer o jogo B terminam ou após a primeira extracção, ou após a segunda extracção.

a) Imagine que decide contribuir para a "viagem de fim de curso" dos seus colegas e que ao ter de escolher um dos dois jogos ouve o seguinte comentário: "Se és um nadinha pessimista, escolhe o jogo B !".

Comente essa afirmação, indicando justificadamente qual o jogo que escolheria.

b) Admita que a urna do jogo A contém 50 bolas brancas, 30 bolas negras e 20 bolas vermelhas. Admita ainda que a urna do jogo B contém 80 bolas amarelas e 20 bolas roxas.

Nestas circunstâncias, que jogo escolheria ? Justifique sucintamente.

c) Considere a Curva de Utilidade , associada ao valor do Prémio a receber, definida por :

$$U = \begin{cases} 0 & ; \quad P \leq 0 \\ P^2 & ; \quad 0 < P \leq 8 \\ - P^2 + 36\,P - 160 & ; \quad 8 < V \leq 10 \\ 100 & ; \quad V > 10 \end{cases}$$

Nota: U (em u. util.) ; P (em 1 000 \$)

Na situação referida na alínea b), que jogo deveria escolher o jogador a que corresponde a Curva de Utilidade apresentada ? Justifique sucintamente, comparando com as conclusões retiradas na alínea b) .

C1 = -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -

C2 = -- -- -- -- -- -- |

C3 = | |

C4 = C22 = |

C5 = |

C6 = |

C7 = -- -- -- -- -- -- |

C8 = | |

C9 = C23 = |

C10 = |

C11 = |

C12 = -- -- -- -- -- -- C26 =

C13 = |

C14 = C24 =

C15 =

C16 =

C17 = -- -- -- -- -- --

C18 = |

C19 = C25 =

C20 =

C21 =

F I L A S   D E   E S P E R A

- 1 - FE01

Admita que o processo de chegadas de clientes a uma loja pode ser considerado um Processo de Poisson, com uma taxa de 5 chegadas por minuto.

Determine:

- a probabilidade de decorrer mais de 1/2 minuto entre duas chegadas consecutivas;

- a probabilidade de chegarem à loja, num dado minuto, menos do que 5 clientes.

- a probabilidade de chegarem à loja, num dado minuto, exactamente 10 clientes.

- 2 - FE02

A MegaIO é uma multinacional na área das telecomunicações. O Dr. Santos Martins, Responsável pelos Serviços Técnicos da MegaIO na Lusólia, está apreensivo com o volume de chamadas telefónicas internas que chegam à Central Telefónica (CT).

Depois de analisarem os registos dos instantes de chegada das chamadas internas à CT num dado dia entre as 09:00:00 e as 09:20:00, os responsáveis pelo planeamento da MegaIO concluíram que os intervalos de tempo entre chegadas consecutivas se podem considerar com distribuição Exponencial, com valor médio igual a 1/2737 (em horas).

O Dr. Santos Martins pretende que se caracterize o número de chamadas telefónicas internas que chegam à CT a cada 10 segundos.

O João Matos, acabado de chegar da Faculdade e em estágio nos Serviços Técnicos da MegaIO na Lusólia, arriscou-se a sugerir que o número de chamadas internas chegadas à CT num dado intervalo de tempo deveriam seguir a distribuição de Poisson. Esta sugestão irritou o Dr. Santos Martins, para quem "Poisson" só quer dizer "peixe" em francês ...

- "E o que é que eu faria com o teu Poisson ?", perguntou rispidamente o Dr. Santos Martins, continuando, "O que eu gostaria é que me dissesses se é provável que num intervalo de 10 segundos - ... sei lá, ou 30 segundos... – que cheguem à CT mais do que 10 chamadas internas ..."

- "Isso não deve ser muito difícil de descobrir...", respondeu o João Matos, puxando o seu portátil e analisando os registos.

*** *** ***

Pretende-se que, relativamente ao período de tempo referido, ajude:

- a caracterizar o processo de chegadas de chamadas telefónicas à CT;
- a caracterizar o número de chamadas telefónicas chegadas à CT em cada 10 segundos;
- a caracterizar o número de chamadas telefónicas chegadas à CT em cada 15 segundos;
- a determinar a probabilidade de chegarem mais do que 10 chamadas telefónicas à CT em cada intervalo de Δ segundos, com Δ entre 10 e 30.

- 3 - FE03

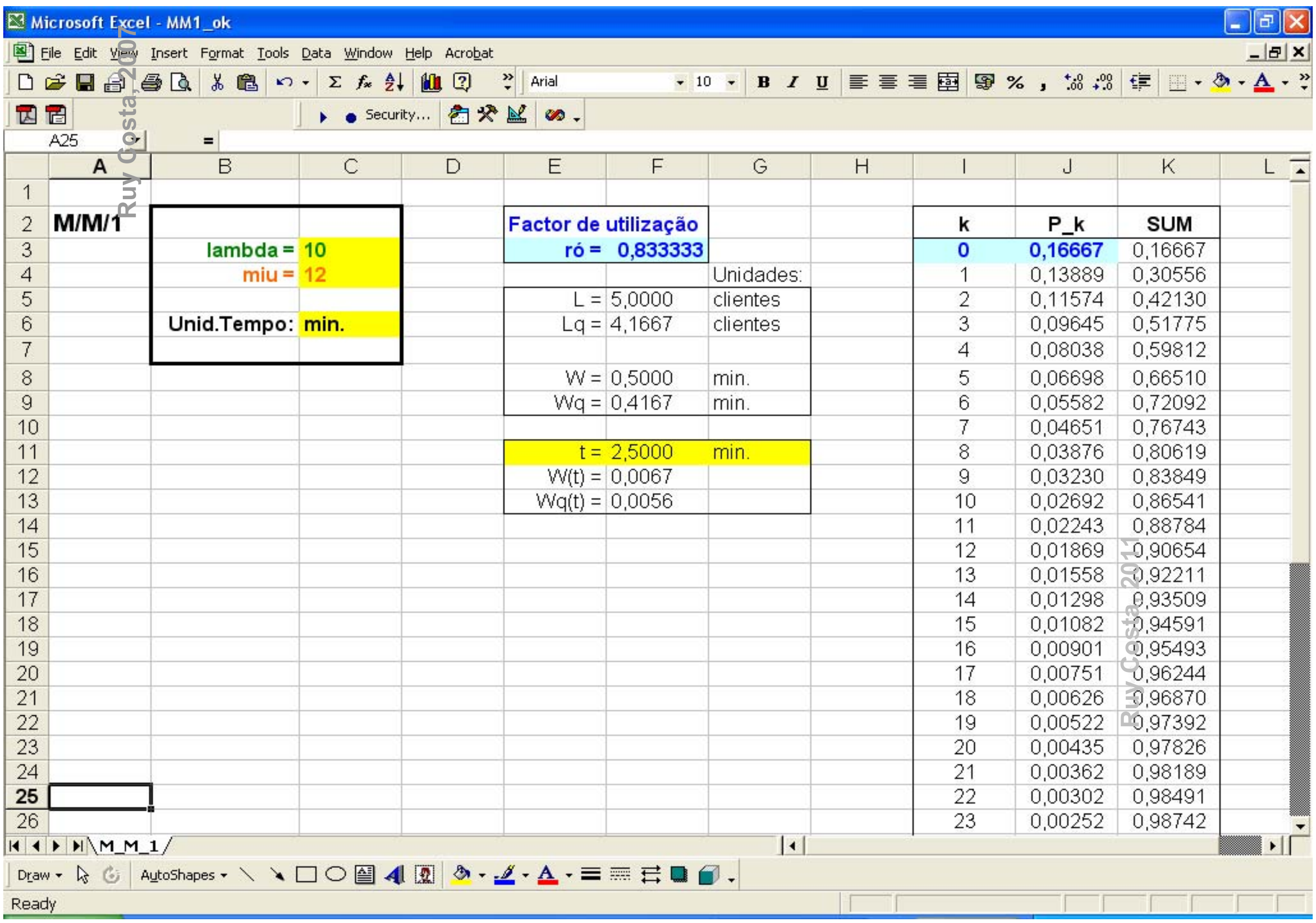
Pretende-se que programe uma Folha de Cálculo para o modelo **M/M/1**, de modo a que o utilizador indique as taxas de chegada , λ, e de serviço, μ, bem como a unidade de tempo.

A Folha de Cálculo deverá permitir calcular ρ, L, L_q, W, W_q , P_0, P_1, ... , P_{40}.

O utilizador poderá ainda indicar t e a Folha de Cálculo deve apresentar P($\mathcal{W}$ > t) e P($\mathcal{W}_q$ > t).

Consulte o Formulário !

Verifique os resultados produzidos pela sua Folha de Cálculo:



Microsoft Excel - MM1_ok

M/M/1			Factor de utilização	
	lambda =	10	ró =	0,833333
	miu =	12		Unidades:
			L = 5,0000	clientes
	Unid.Tempo:	min.	Lq = 4,1667	clientes
			W = 0,5000	min.
			Wq = 0,4167	min.
			t = 2,5000	min.
			W(t) = 0,0067	
			Wq(t) = 0,0056	

k	P_k	SUM
0	0,16667	0,16667
1	0,13889	0,30556
2	0,11574	0,42130
3	0,09645	0,51775
4	0,08038	0,59812
5	0,06698	0,66510
6	0,05582	0,72092
7	0,04651	0,76743
8	0,03876	0,80619
9	0,03230	0,83849
10	0,02692	0,86541
11	0,02243	0,88784
12	0,01869	0,90654
13	0,01558	0,92211
14	0,01298	0,93509
15	0,01082	0,94591
16	0,00901	0,95493
17	0,00751	0,96244
18	0,00626	0,96870
19	0,00522	0,97392
20	0,00435	0,97826
21	0,00362	0,98189
22	0,00302	0,98491
23	0,00252	0,98742

- 4 - FE04

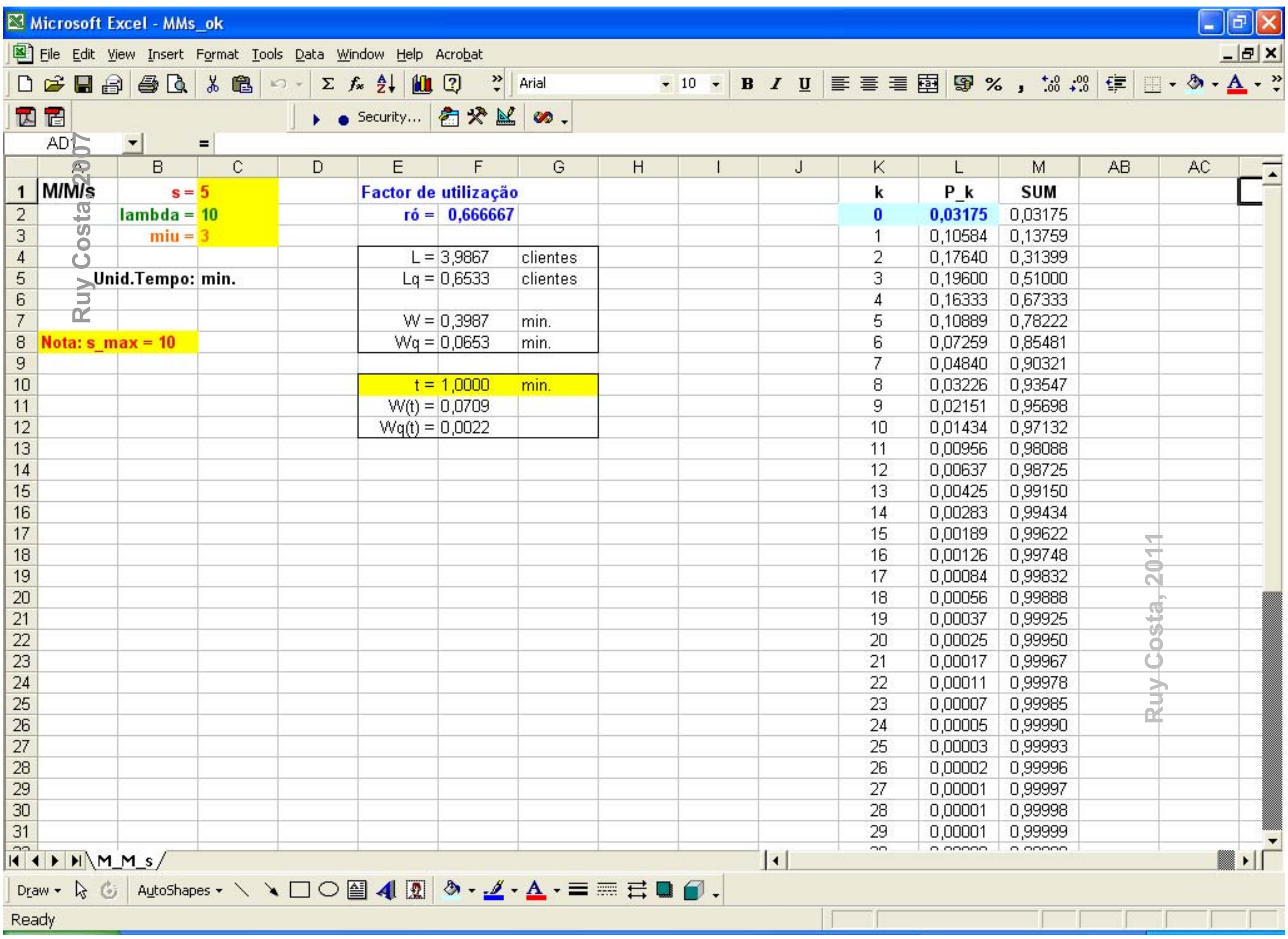
Pretende-se que programe uma Folha de Cálculo para o modelo **M/M/s**, de modo a que o utilizador indique o número de servidores, s (assuma que s $\leq$ 10), as taxas de chegada , λ, e de serviço, μ, bem como a unidade de tempo.

A Folha de Cálculo deverá permitir calcular ρ, L, L_q, W, W_q , P_0, P_1, ... , P_{40}.

O utilizador poderá ainda indicar t e a Folha de Cálculo deve apresentar P($\mathcal{W}$ > t) e P($\mathcal{W}_q$ > t).

Consulte o Formulário !

Verifique os resultados produzidos pela sua Folha de Cálculo:



k	P_k	SUM
0	0,03175	0,03175
1	0,10584	0,13759
2	0,17640	0,31399
3	0,19600	0,51000
4	0,16333	0,67333
5	0,10889	0,78222
6	0,07259	0,85481
7	0,04840	0,90321
8	0,03226	0,93547
9	0,02151	0,95698
10	0,01434	0,97132
11	0,00956	0,98088
12	0,00637	0,98725
13	0,00425	0,99150
14	0,00283	0,99434
15	0,00189	0,99622
16	0,00126	0,99748
17	0,00084	0,99832
18	0,00056	0,99888
19	0,00037	0,99925
20	0,00025	0,99950
21	0,00017	0,99967
22	0,00011	0,99978
23	0,00007	0,99985
24	0,00005	0,99990
25	0,00003	0,99993
26	0,00002	0,99996
27	0,00001	0,99997
28	0,00001	0,99998
29	0,00001	0,99999

- 5 - FE05

A “LavAuto” é um posto de lavagem automática de automóveis, com um pequeno parque, que permite que, no máximo, 4 automóveis aguardem pelo início da lavagem.

Como a “LavAuto” se situa numa zona com muito movimento automóvel, se um potencial cliente pretender entrar e se deparar com o parque cheio, desistirá da lavagem e prosseguirá a sua marcha.

Os potenciais clientes chegam à ”LavAuto” segundo um Processo de Poisson, com uma taxa de 10 chegadas por hora, estimando-se que a duração do atendimento de um cliente se possa considerar exponencialmente distribuído, com valor médio igual a 5 minutos.

Determine:

a) a probabilidade da “LavAuto” estar vazia;
b) a probabilidade da “LavAuto” estar completamente cheia;
c) o número médio de automóveis na “LavAuto”;
d) o tempo médio de espera na fila;
e) a receita perdida, devido ao parque estar cheio, sabendo que o valor médio da receita por lavagem é igual a 4,00 €.

Consulte o Formulário !

- 6 - FE06

Considere a “LavAuto” do exercício anterior.

O gerente da “LavAuto” está a avaliar o interesse da montagem de um segundo posto de lavagem automática de automóveis, ainda que tal implique a redução do pequeno parque, que passaria a permitir a espera de, no máximo, apenas 3 automóveis.

Admita que os dois postos de lavagem são idênticos, com uma duração média de lavagem igual a 5 minutos.

Determine:

f) a probabilidade da “LavAuto” estar vazia;
g) a probabilidade da “LavAuto” estar completamente cheia;
h) o número médio de automóveis na “LavAuto”;
i) o tempo médio de espera na fila;
j) a receita perdida, devido ao parque estar cheio, sabendo que o valor médio da receita por lavagem é igual a 4,00 €.

Consulte o Formulário !

- 7 - FE07

Numa fábrica de têxteis existem 15 teares que, quando se avariam, são reparados por dois técnicos de manutenção.

Sabe-se que o intervalo de tempo entre duas avarias consecutivas se pode considerar com distribuição exponencial de média 5 horas e que a reparação de cada tear avariado tem uma duração que se pode considerar com distribuição exponencial de média 1 hora.

Sabendo que se estima um prejuízo de 100 € por ~~cada hora de inactividade de uma~~ máquina inativa, e que cada técnico de manutenção se traduz num custo ~~horário~~ de 10 €, seria justificável a contratação de um terceiro técnico de manutenção ? E qual o número de técnicos de manutenção que seria recomendável ?

Consulte o Formulário !

- 8 - FE08

- “Grrrr ... Detesto trabalhar à pressão !”, rosnava o Sr. Silva, dono da tabacaria há mais de 30 anos, “Quando só está um cliente, sempre podemos dar dois dedos de conversa ... ou mesmo três ... Agora, quando estou a atender alguém e me aparece outro que fica à espera e que começa a olhar para mim, a minha tensão aumenta e lá tenho que despachar o cliente ... E, então, se estão muitos à espera, viro robot ... o que já não é adequado à minha idade !”

O Sr. Silva é o único a atender os seus clientes. O Sábado de manhã é sempre mais complicado. A Tabacaria está bem localizada e há 2,5 clientes por minuto a chegar ... O Sr. Silva normalmente despacha 3 clientes por minuto.

Em conversa com o Sr. Silva, elaborámos o Quadro seguinte, que mostra que o aumentar de clientes na sua tabacaria o pressiona e o leva a despachá-los mais rapidamente.

n	μ_n
1	3,000
5	4,862
10	5,986
15	6,760
20	7,369

O Sr. Silva gostaria de saber se não se sentisse pressionado, se os seus clientes iriam esperar muito mais para ser atendidos.

- “Se calhar isto é mesmo mania minha ... Se eu atendesse todos ao mesmo ritmo esperavam um pouquito mais e ninguém se importava ... Ou será que ficavam furiosos ?”, interrogava-se o pobre Sr. Silva, suspirando.

* * *

a) Determine P0, L e W, no contexto “sem pressão”.

b) Recorrendo aos dados apresentados no Quadro acima, estime a constante de pressão **c**, que melhor se adapta a esses dados.

c) Determine P0, L e W, no contexto “com pressão” e compare os resultados com os obtidos na alínea a).

Formulário:

$$\mu_n = n^c \cdot \mu_1 , \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$C_n = \frac{(\lambda / \mu_1)^n}{(n!)^c} , \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$P_n = C_n \, P_0 , \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots .$$

$$P_0 = 1 \; / \; \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \right)$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n$$

- 9 - FE09

- "Esperar na Tabacaria do Sr. Silva ? Nem pensar !", dizia um dos clientes da Tabacaria do Sr. Silva na conversa com um amigo.

Tal como este cliente, vários outros também não estavam na disposição de grandes esperas na Tabacaria do Sr. Silva ... Na realidade, quanto mais clientes estavam na Tabacaria, menor a vontade de os potenciais clientes entrarem para aguardar o atendimento ...

O Sr. Silva é o único a atender os seus clientes. O Sábado de manhã é sempre mais complicado. A Tabacaria está bem localizada e há 2,5 potenciais clientes por minuto a chegar... O Sr. Silva normalmente despacha 3 clientes por minuto.

Depois de se observar o comportamento dos potenciais clientes, foi possível quantificar a efectiva diminuição de entradas na Tabacaria, em função do número de clientes que estava no seu interior:

n	λ_n
0	2,5
1	1,6
2	1,3
3	1
4	0,9
5	0,8
10	0,6
15	0,5
20	0,4

Qual o impacto da pressão sentida pelos potenciais clientes do Sr. Silva, resultante dos clientes no interior da tabacaria ?

* * *

d) Determine P0, L e W, no contexto "sem pressão".

e) Recorrendo aos dados apresentados no Quadro acima, estime a constante de pressão **b**, que melhor se adapta a esses dados.

f) Determine P0, L e W, no contexto "com pressão" e compare os resultados com os obtidos na alínea a).

Formulário a seguir !

Formulário:

$$\lambda_n = (n + 1)^{-b} \cdot \lambda_0 , \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$C_n = \frac{(\lambda_0 / \mu)^n}{(n!)^b} , \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

$$P_n = C_n \, P_0 , \quad \text{para } n = 1, 2, \dots .$$

$$P_0 = 1 \; / \; \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \right)$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot P_n$$

- 10 - FE10

Na sua Tabacaria, o Sr. Silva é o único a atender os seus clientes. O Sábado de manhã é sempre mais complicado. A Tabacaria está bem localizada e há 2,5 potenciais clientes por minuto a chegar... O Sr. Silva normalmente despacha 3 clientes por minuto.

Depois de se observar o comportamento dos potenciais clientes, foi possível quantificar a efectiva diminuição de entradas na Tabacaria, em função do número de clientes que estava no seu interior:

n	λ_n
0	2,5
1	1,6
2	1,3
3	1
4	0,9
5	0,8
10	0,6
15	0,5
20	0,4

Por outro lado, o Sr. Silva sente-se pressionado pelo número de clientes na sua tabacaria, tendendo a despachá-los mais rapidamente à medida que o seu número aumenta:

n	μ_n
1	3,000
5	4,862
10	5,986
15	6,760
20	7,369

Compare a situação clássica do modelo M/M/1, com a resultante destes dois factores de pressão.

* * *

g) Determine P0, L e W, no contexto “sem pressão”.

h) Determine P0, L e W, no contexto “com dois factores de pressão” e compare os resultados com os obtidos na alínea a).

Formulário:

$$\mu_n = n^c \, . \, \mu_1 \, , \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_n = (n + 1)^{-b} \, . \, \lambda_0 \, , \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$C_n = \frac{(\lambda_0/\mu_1)^n}{(n!)^{b+c}} \, , \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$P_n = C_n \, P_0 \, , \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \, .$$

$$P_0 = 1 \; / \; \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \right)$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \, . \, P_n$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, . \, P_n$$

- 11 - FE11

O “Canto da Tia Alice” é um pequeno café, com apenas uma empregada – a tia Alice em pessoa.

Sabe-se que o processo de chegadas de clientes ao“Canto da Tia Alice” se pode considerar Poissoniano de taxa média igual a 2,0 chegadas por minuto.

A sobrinha Francisca esteve a cronometrar a tia Alice a trabalhar (“Mas porque raio é que aquela miúda não larga o cronómetro e não me vem ajudar aqui atrás do balcão ?”, pensou a tia Alice) chegou à conclusão que a tia atende um cliente em aproximadamente 20 segundos.

O Mário – o sobrinho favorito da tia Alice – ao saber das conclusões da Francisca após um dia de cronometragem exclamou:

- “Mas que **grande** conclusão !!! “Aproximadamente” 20 segundos a atender um cliente !!! Mas a tia Alice é algum robot e demora exactamente 20 segundos com cada cliente ? Ou será que a duração do atendimento de um cliente se pode considerar com distribuição Exponencial de valor médio 20 segundos ?? Ou será que a duração do atendimento, DA, de um cliente se pode considerar decomposta na soma de dois “tempos exponencialmente distribuídos” – o tempo do café e o tempo do bolinho – tais que DA ~ $T_1 + T_2$, com T_1, T_2 v.a. i.i.d. e $T_1 \sim T_2 \sim$ Exponencial com valor médio igual a 10 segundos ???”

“Já sabia que o Mário estava a estudar Matemática e que era um tipo muito esquiisito ... mas, assim tanto ?”, pensou a Francisca suspirando.

Compare os três cenários referidos pelo Mário e determine as correspondentes medidas de desempenho do sistema de atendimento de clientes no “Canto da Tia Alice”, comparando-as.

Depois de se observar o comportamento dos potenciais clientes, foi possível quantificar a efectiva diminuição de entradas na Tabacaria, em função do número de clientes que estava no seu interior:

Formulário:

Fórmula de Pollaczek-Khintchine M/G/1	$L_q = \dfrac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$
M/D/1	$L_q = \dfrac{\rho^2}{2(1-\rho)}$
M/ E_k/1	$Lq = \dfrac{1+k}{2k}\,\dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

- 12 - FE12

No Hospital Distrital de Lisbólia, aos Sábados de manhã, os pacientes chegam segundo um processo Poissoniano com taxa média igual a 2,0 pacientes por hora. Em média, um médico consegue tratar 3 pacientes por hora, podendo assumir-se que a duração de um atendimento segue uma distribuição Exponencial.

Cerca de 10 % dos pacientes correspondem a casos críticos; 30 % correspondem a casos graves e 60 % a casos estáveis.

Pretende-se avaliar o interesse de ter um ou dois médicos ao serviço. Para tal, deve comparar os resultados obtidos no contexto "sem prioridades", com os correspondentes no cenário "com prioridades".

As prioridades são "absolutas" se a chegada de um paciente crítico implicara interrupção do atendimento de um paciente em estado não crítico, para se dar início ao atendimento do paciente em estado crítico.

Avalie a diferença do desempenho do sistema no cenário de prioridades absolutas e não absolutas.

(Exercício adaptado de Hillier e Lieberman.)

Consulte o Formulário !

- 13 - FE13

O José, aluno finalista do curso de Matemática da Universidade da Lusólia, está a fazer o seu estágio sobre Filas de Espera na Cantina da sua Universidade, estando a analisar, neste momento, um dos locais mais populares da sua Cantina: o "SPG – Só Para Gulosos !".

O "SPG – Só Para Gulosos !" é um bar onde todos os clientes tomam uma "bica" e comem um bolo, passando ao longo de um comprido balcão de atendimento: primeiro passam na caixa registadora de pré-pagamento, depois levantam o seu café e, seguindo em frente, escolhem o seu bolinho.

"Que interessante !", pensou o José, "uma empregada para a caixa registadora, duas para servir os cafés e, finalmente, uma nos bolinhos ... Estes tipos parecem-me eficientes, com esta especialização dos empregados ...".

O José concluiu que, a seguir ao almoço, o processo de chegada dos clientes ao "SPG – Só Para Gulosos !" é Poissoniano, com taxa média igual a 10 clientes por minuto. Concluíu também que as durações de atendimento de um cliente nos três "serviços" se podiam considerar com distribuição Exponencial, com valores médios (em segundos) dados na tabela seguinte:

“Serviço”	Caixa Registadora	Cafés	Bolinhos
Duração Média (seg.)	4,5	9,0	5,0

Quando soube que o José era um “tipo lá da Matemática”, o Gerente do SPG resolveu conversar:

- “Ouve lá, pá, por exemplo, qual a probabilidade de estarem simultaneamente 3 tipos na caixa, outros 3 nos cafés e mais 3 nos bolinhos ? É que o balcão do SPG é comprido, mas não é elástico e eu não quero aqui cenas de pancadaria ... Achas que valia a pena contratar mais alguém ? E para onde ? Mas olha que eu não sou primo da Madre Teresa de Calcutá ! Qual é a probabilidade dos meus escravos estarem todos a descansar ao mesmo tempo ???”

Antes que o José pudesse sequer respirar, o Gerente voltou à carga:

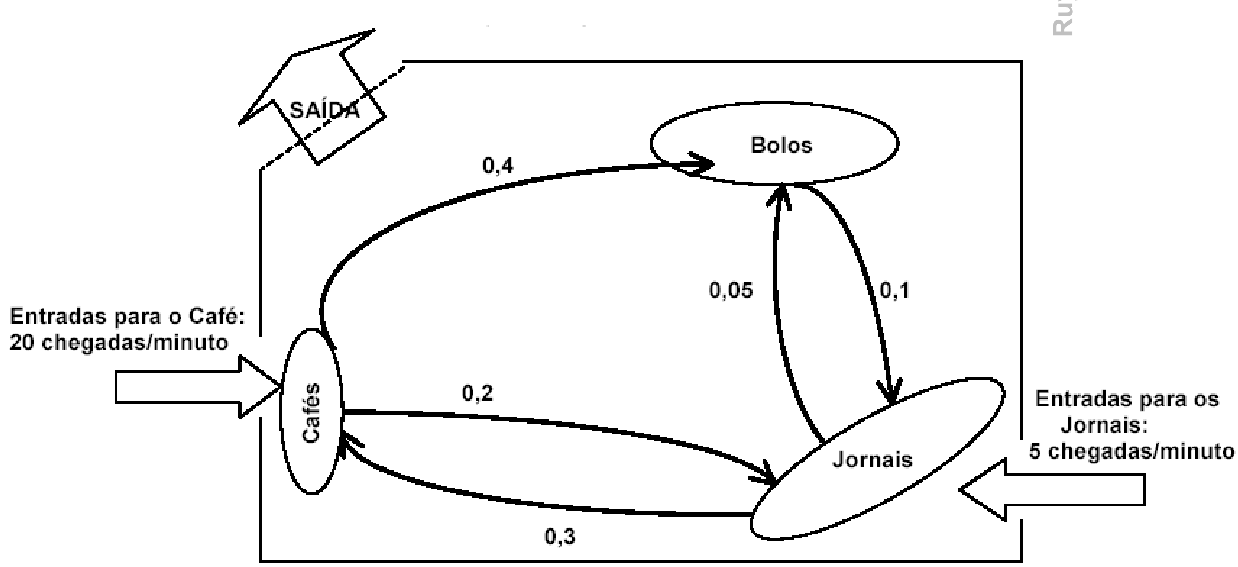
- “Sabes, pá, tive uma outra ideia: utilizava os 4 empregados todos à misturada ... ‘Tás a ver: caixa, cafés e bolos ... Polivalência ... É uma chatice isto ser assim um bocado acanhadito, iam começar às cotoveladas uns aos outros e, de certeza que por cliente acabavam por demorar mais do que os 4,5 + 9,0 + 5,0 segundos que determinaste antes ... Se calhar demoravam uns 20 segundos com cada cliente ... O que é que achas, pá ?” .

* * *

Ajude o José a analisar a situação no “SPG – Só Para Gulosos !”.

- 14 - FE14

O José, aluno finalista do curso de Matemática da Universidade da Lusólia, está a fazer o seu estágio sobre Filas de Espera na Cantina da sua Universidade, estando a agora a analisar o “CBJ – Café, Bolos e Jornais”, um recanto muito popular da sua Cantina. O José concluíu que os processos de chegada dos clientes do exterior são Poissonianos e que a transição entre sectores é feita de acordo com o esquema seguinte:



Assim, e por exemplo, 20 % dos clientes dos “Cafés” dirigem-se posteriormente para a secção “Jornais”.

As durações de atendimento de um cliente nos três “serviços” podem-se considerar com distribuição Exponencial, com valores médios (em segundos) dados na tabela seguinte:

“Serviço”	Cafés	Bolos	Jornais
Duração Média (seg.)	9,0	5,0	10,0

O Gerente do “CBJ – Café, Bolos e Jornais” dispõe de um total de 8 empregados que podem ser afectados a cada uma das três secções e, segundo as suas palavras, “Nem quero sonhar com mais de 30 clientes a serem atendidos ou em espera !!! Isso era um pesadelo !!!”.

O Gerente do CBJ gostaria de ter a sua proposta de afectação e, para essa proposta, gostaria de saber qual a probabilidade de estarem mais de 30 clientes a serem atendidos ou em espera. Gostaria, ainda, de saber, para o sistema de atendimento proposto, qual o número total esperado de clientes no sistema e qual o tempo médio de permanência de um cliente no sistema.

* * *

Ajude o José a analisar a situação no “CBJ – Café, Bolos e Jornais”.

- 15 -

O processo de chegadas de clientes à recém-aberta “Agência de Viagens Mega VIP” pode considerar-se Possoniano com taxa média igual a 5 por hora. Por outro lado, em média, a dona da Agência (e, de momento, a única empregada) pode atender 8 clientes por hora.

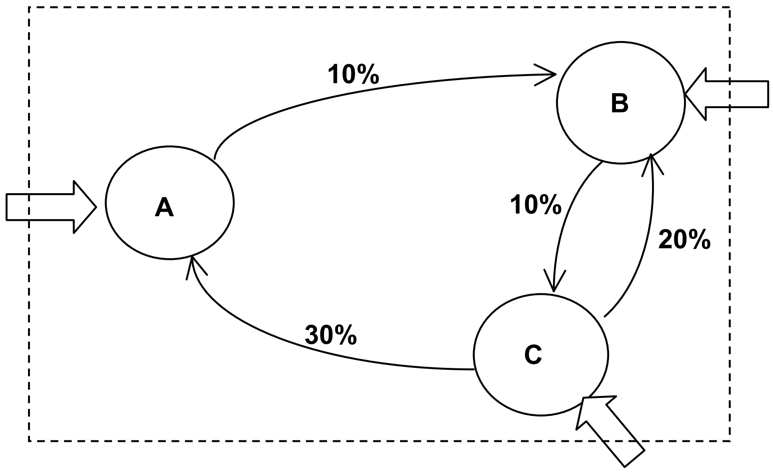
a) Admitindo que a duração do atendimento de cada cliente é rigorosamente igual a 7,5 minutos, determine o tempo médio que um cliente tem de esperar para começar a ser atendido.

b) Admita que o atendimento de cada cliente se pode considerar com duas fases: “conversa inicial” (com duração Exponencial de valor médio igual a 2 minutos) e “concretização” (com duração Exponencial de valor médio igual a 5,5 minutos). Determine o tempo médio que um cliente tem de esperar para começar a ser atendido.

c) A dona da “Agência de Viagens Mega VIP” pensou criar o “Cartão Mega VIP”, que daria prioridade no atendimento, sem no entanto se interromper atendimentos em curso. De acordo com as suas estimativas, 20 % dos clientes aderirão ao “Cartão Mega VIP”. Admitindo que a duração do atendimento de cada cliente se possa considerar com distribuição Exponencial de média igual a 7,5 minutos, determine o tempo médio que um cliente <u>com</u> “Cartão Mega VIP” terá de esperar para começar a ser atendido **<u>e</u>** o tempo médio que um cliente <u>sem</u> “Cartão Mega VIP” terá de esperar para começar a ser atendido.

- 16 -

Considere rede de filas de espera esquematizada abaixo, com processos de chegadas Poissonianos e durações de serviço com distribuição Exponencial:



Nota: As setas largas indicam as entradas do exterior e as setas finas indicam as possibilidades de transição entre sectores (com as

a) Sabendo que λ_A = 10,2669 clientes/h, λ_B = 12,7823 clientes/h e que λ_C = 17,5565 clientes/h, determine as taxas de entrada de clientes para cada secção, directamente do exterior.

b) Sabe-se que μ_A = 6,0000 clientes/h, μ_B = 15,0000 clientes/h e que μ_C = 20,0000 clientes/h e que se dispõe de 5 empregados para distribuir pelos três sectores.

Com base nos valores do quadro seguinte, proponha uma distribuição dos empregados tal que a permanência de um cliente no sistema não ultrapasse a meia hora. Justifique.

Sector	**A**		**B**		**C**	
clientes/h λ	10,2669		12,7823		17,5565	
clientes/h μ	6,0000		15,0000		20,0000	
M/M/1 ou M/M/S	**M/M/2**	**M/M/3**	**M/M/1**	**M/M/2**	**M/M/1**	**M/M/2**
ρ	0,8556	0,5704	0,8522	0,4261	0,8778	0,4389
clientes **L**	6,3853	2,1329	5,7639	1,0412	7,1849	1,0873
clientes **Lq**	4,6741	0,4217	4,9117	0,1890	6,3070	0,2095
h **W**	0,6219	0,2077	0,4509	0,0815	0,4092	0,0619
h **Wq**	0,4553	0,0411	0,3843	0,0148	0,3592	0,0119
P0	0,0778	0,1634	0,1478	0,4024	0,1222	0,3899
P1	0,1332	0,2796	0,1260	0,3429	0,1072	0,3423
P2	0,1139	0,2393	0,1074	0,1461	0,0941	0,1502
P3	0,0975	0,1365	0,0915	0,0623	0,0826	0,0659
P4	0,0834	0,0778	0,0780	0,0265	0,0725	0,0289
P5	0,0714	0,0444	0,0664	0,0113	0,0637	0,0127

c) Para a distribuição dos empregados proposta na alínea b), determine a probabilidade de se encontrarem no sistema exactamente **2** clientes.

Nota: Se não resolveu a alínea b), admita que no sector A tem 3 empregados, no sector B tem 1 empregado e no sector C tem 1 empregado.

- 17 -

"Os Mimos da Tia Leonarda" é uma famosa loja de doçaria que tem cinco sectores com atendimento autónomo e especializado:

- A) "Bolachinhas da Minha Avó";
- B) "Chocolaterie";
- C) "Bolos daTia Leo";
- D) "Pudins da Zu";
- E) "Paraíso Conventual".

De acordo com os registos da Tia Leonarda, um cliente circula entre os vários sectores com as seguintes probabilidades:

De \ Para	A	B	C	D	E
A	-	0,20	0,30	0,10	0,03
B	0,10	-	0,20	0,05	0,04
C	0,20	0,10	-	0,30	0,12
D	0,05	0,10	0,35	-	0,10
E	0,01	0,05	0,10	0,07	-

Os processos de chegada dos clientes do exterior directamente a cada um dos sectores podem considerar-se Poissonianos com taxas médias indicadas no quadro seguinte. Nesse quadro indica-se também o tempo médio de atendimento em cada sector :

Sector	Taxa média de Chegadas, por hora	Tempo médio de Atendimento, em minutos
A	15	2,0
B	50	1,6
C	30	3,0
D	10	2,5
E	13	3,5

A Zumélia, secretária da Tia Leonarda, já tinha concluído que os tempos de atendimento em cada um dos sectores se poderia considerar exponencialmente distribuidos.

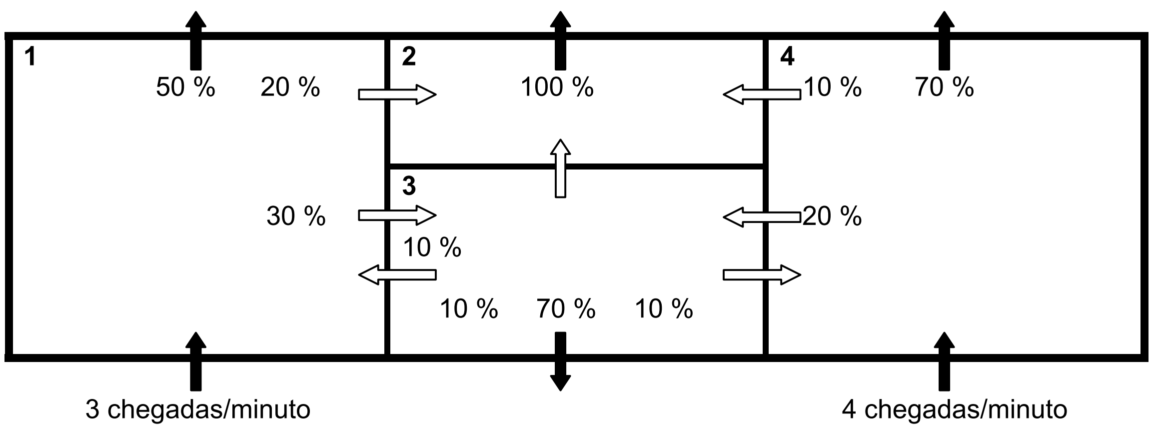
a) Determine as taxas médias efectivas de chegadas de clientes a cada um dos sectores.

b) Admita que estão ao serviço, em cada um dos sectores, o número mínimo de servidores. Determine o tempo médio de permanência no sistema de um cliente.

c) Admita que pode afectar um total de dois novos servidores a um (ou dois) sector(es). Onde colocaria os novos servidores? Qual o impacto que estes dois novos servidores teriam no tempo médio de permanência no sistema de um cliente?

- 18 -

Um determinado sistema de espera é constituído por quatro sectores *interdependentes*, de acordo com o esquema abaixo:



Resumidamente, os clientes só poderão entrar no sistema, pelos sectores 1, ou 4, de acordo com processos Poissonianos de taxa média, respectivamente, igual a 3 chegadas/minuto e 4 chegadas/minuto.

Depois de atendidos no sector 1, 20 % dos clientes seguirão para o sector 2, 30 % dos clientes seguirão para o sector 3 e 50 % deixarão o sistema.

Depois de atendidos no sector 2, todos os clientes deixarão o sistema.

Depois de atendidos no sector 3, 10 % dos clientes seguirão para o sector 1, 10 % dos clientes seguirão para o sector 2, 10 % dos clientes seguirão para o sector 4 e 70 % deixarão o sistema.

Depois de atendidos no sector 4, 10 % dos clientes seguirão para o sector 2, 20 % dos clientes seguirão para o sector 3 e 70 % deixarão o sistema.

Pode-se admitir que a duração do serviço em cada sector é distribuída exponencialmente. No sector 1, os clientes serão atendidos por dois servidores, com idêntica taxa de serviço – a duração média de cada serviço será de 30 segundos. No sector 2, os clientes serão atendidos por um servidor, sendo a duração média de cada serviço igual a 25 segundos. No sector 3, os clientes serão atendidos por um servidor, sendo a duração média de cada serviço igual a 15 segundos. No sector 4, os clientes serão atendidos por um servidor, sendo a duração média de cada serviço igual a 10 segundos.

Admita que, em cada sector, não há qualquer limitação quanto ao tamanho da fila de espera.

a) Determine as taxas de entrada nos diferentes sectores e caracterize esses processos de entrada.

b) Determine a probabilidade de o sistema se encontrar vazio.

c) Determine o número médio total de clientes no sistema **e** o tempo médio de permanência no sistema por cliente.

Formulário

Sistema M/M/1, População = ∞ ; Fila máxima = ∞

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo.

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de μ clientes por unidade de tempo (pelo **único servidor**).

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação** $\rho = \lambda / \mu \ (\rho < 1)$

Taxa de **desocupação** $= 1 - \rho = P_0 = P(\mathcal{W}_q = 0)$

$$L = L_q + \lambda / \mu$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W = W_q + 1 / \mu$$

$$W = L / \lambda = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = L_q / \lambda = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

$$P_0 = 1 - \rho = P(\mathcal{W}_q = 0)$$

$$P_n = \rho^n P_0 = \rho^n (1 - \rho)$$

$$P(n > k) = \rho^{k+1}$$

$$P(\mathcal{W} > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-t/W} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(W_q > t) = \rho\, e^{-\mu(1-\rho)t} = \rho\, e^{-t/W} \quad \text{para } t \geq 0$$

Sistema M/M/S, População = ∞ ; Fila máxima = ∞

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa média de chegadas de λ clientes por unidade de tempo.

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos ***S*** **servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1,2,\ldots,S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação** $\rho = \lambda / (S\,\mu)$ $(\rho < 1)$

Taxa de **desocupação** $= 1 - \rho$

$L = L_q + \lambda / \mu$

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2}$$

$W = W_q + 1/\mu = L/\lambda$

$W_q = L_q / \lambda$

$$P_0 = \left[\frac{S^S \rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{S} \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ; n = 1,\ldots,S \\ \dfrac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ; n \geq S+1, \end{cases}$$

$$P(\mathcal{W} > t) = e^{-\mu.t}\left[1 + \frac{(S\rho)^S P_0 \left(1 - e^{-\mu.t(S-1-S\rho)}\right)}{S!(1-\rho)(S-1-S\rho)}\right] \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(\mathcal{W}_q > t) = \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} e^{-S\mu.t(1-\rho)} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(\mathcal{W}_q = 0) = 1 - \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)}$$

Sistema M/M/1/K, População = ∞ ; Fila máxima = K – 1

Número máximo de clientes no sistema = *K*

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** no sistema será dependente do estado *n* do sistema (isto é, do número *n* de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0,1,\ldots, K-1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases} \quad ; \quad \bar{\lambda} = \lambda\,(1 - P_K)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de μ clientes por unidade de tempo (pelo **único servidor**).

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **pressão** $\rho = \lambda / \mu$

Taxa de **ocupação** $= \bar{\lambda}/\mu$

Taxa de **desocupação** $= 1 - \bar{\lambda}/\mu = P_0 = P(\mathcal{W}_q = 0) = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$

$$L = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} & ; \rho \neq 1 \\ \dfrac{K}{2} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

$$L_q = L - \bar{\lambda} / \mu$$

$$W = W_q + 1/\mu$$

$$W = L / \bar{\lambda}$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = P(\mathcal{W}_q = 0)$$

$$P_n = \begin{cases} \rho^n P_0 & ; \rho \neq 1 \wedge n \leq K \\ 1/(K+1) & ; \rho = 1 \wedge n \leq K \\ 0 & ; n > K \end{cases}$$

Sistema M/M/S/K, População = ∞ ; Fila máxima = K – S

S $\leq$ **K; Nº máximo de clientes no sistema = K; Nº de servidores = *S***

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** de clientes no sistema será dependente do estado *n* do sistema (isto é, do número *n* de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0,1,\ldots,K-1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases} \quad ; \quad \bar{\lambda} = \lambda\,(1 - P_K)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos ***S*** **servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1,2,\ldots,S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **pressão** $\rho = \lambda / (S\,\mu)$)

Taxa de **ocupação** = $\bar{\lambda} / (S\,\mu)$ $\qquad \bar{\lambda} = \lambda\,(1 - P_K)$

Taxa de **desocupação** = $1 - \bar{\lambda} / (S\,\mu)$

$$P_0 = \begin{cases} \left[\dfrac{S^S \rho^{S+1}(1-\rho^{K-S})}{S!(1-\rho)} + \displaystyle\sum_{n=0}^{S} \dfrac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1} & ; \rho \neq 1 \\ \left[\dfrac{S^S}{S!}(K-S) + \displaystyle\sum_{n=0}^{S} \dfrac{S^n}{n!} \right]^{-1} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ; n = 1,\ldots,S \\ \dfrac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ; n = S+1,\ldots,K \\ 0 & ; n \geq K+1 \end{cases}$$

$$P(\mathcal{W}_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2} \left[1 - \rho^{K-S} - (1-\rho)(K-S)\rho^{K-S} \right]$$

$W_q = L_q / \bar{\lambda}$

$W = W_q + 1/\mu \quad ; \quad L = \bar{\lambda}\,W = L_q + \bar{\lambda}/\mu$

Sistema M/M/*S*/*N*, População = *N* (Fila máxima = *N* – *S*)

$S \leq N$; Nº máximo de clientes no sistema = N; Nº de servidores = S

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** de clientes no sistema será dependente do estado *n* do sistema (isto é, do número *n* de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda(N-n) & ; n = 0,1,\ldots,N-1 \\ 0 & ; n \geq N \end{cases} \quad ; \quad \bar{\lambda} = \lambda\,(N-L)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos ***S* servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1,2,\ldots,S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação** = $\bar{\lambda} / (S\mu)$

Taxa de **desocupação** = $1 - \bar{\lambda} / (S\mu)$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{N!}{(N-n)!\,n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=S}^{N} \frac{N!}{(N-n)!\,S!\,S^{n-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1}$$

Caso particular **S = 1**:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1} = \text{taxa de desocupação}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!\,n!} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = 1,\ldots,S \\ \dfrac{N!}{(N-n)!\,S!\,S^{n-S}} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = S+1,\ldots,N \\ 0 & ; n \geq N+1 \end{cases}$$

continua

continuação

Caso particular **S = 1**:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = 1,\dots,N \\ 0 & n > N \end{cases}$$

$$P(\mathcal{W}_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

$$L_q = \sum_{n=0}^{N} (n-S)P_n$$

Caso particular **S = 1**:

$$L_q = N - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1-P_0)$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$W = W_q + 1/\mu \quad ; \quad L = \bar{\lambda}\, W = L_q + \bar{\lambda}/\mu$$

♦ Prioridades "não absolutas":

$$W_k = \frac{1}{A.B_{k-1}.B_k} + \frac{1}{\mu}, \qquad \text{para } k = 1, 2, \dots, N$$

Com $A = S!\left(\dfrac{S\mu-\lambda}{r^S}\right)\displaystyle\sum_{j=0}^{S-1}\frac{r^j}{j!} + S.\mu$,

$B_0 = 1$,

$$B_k = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}{S\mu}, \qquad \text{para } k = 1, 2, \dots, N,$$

e S = número de servidores,

μ = taxa média de serviço por cada servidor ocupado,

λ_i = taxa média de chegadas da classe de prioridade i, i = 1, 2, …, N

$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$ e

$r = \lambda / \mu$

♦ **Prioridades “absolutas”:**

$$W_k = \frac{1/\mu}{B_{k-1}.B_k}, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, N.$$

$$L_k = \lambda_k \,.\, W_k\,, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots N.$$

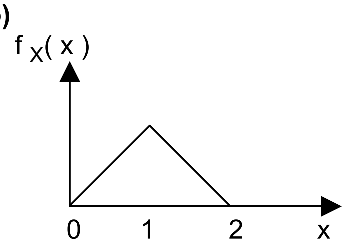
S I M U L A Ç Ã O

- 1 -

Elabore uma rotina que lhe permita gerar números pseudo-aleatórios (NPA) com distribuição X ($f_X(x)$ representa a função de densidade de probabilidade de X e $F_X(x)$ representa a função de distribuição acumulada de X) :

a) $X \sim$ Uniforme $[a, b]$, $a < b$.

b)



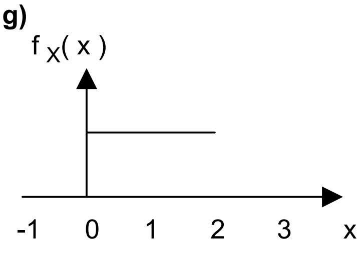
c) $X \sim$ Normal $(\mu ; \sigma)$.

d) $X \sim$ Exponencial (λ) .

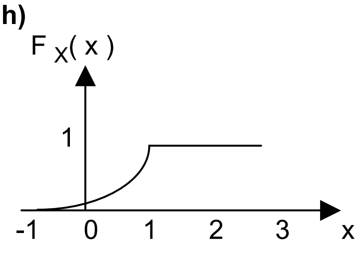
e)
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \; x \notin [0;1] \\ -6 \cdot x^2 + 6 \cdot x & ; \; x \in [0;1] \end{cases}$$

f)
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \; x \notin [0;1] \\ 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 3 & ; \; x \in [0;1] \end{cases}$$

g)



h)



Nota : $F_X(x)$ é uma função quadrática no intervalo [-1 ; 1] com tangente horizontal em x = -1 .

- 2 -

Elabore uma rotina que lhe permita gerar números pseudo-aleatórios com distribuição X :

a) X ~ Uniforme { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }

b) X ~ Binomial (n = 5 ; p = 0,3)

Nota : $X \sim Bin(n ; p) \Leftrightarrow P(X = k) = C^{n}_{k}\, p^{k}\, (1-p)^{n-k}$; $k = 0 , 1 , ... , n$.

c) X ~ Poisson (m)

Notas: 1) $X \sim Poisson(m) \Leftrightarrow P(X = k) = m^{k} . e^{-m} / k!$; $k = 0 , 1 , 2 , ...$

2) As variáveis aleatórias Poisson(m) e Exponencial(λ) estão relacionadas...

d)

k	Azul	Verde	Amarelo	Branco
P (X = k)	2 / 6	1 / 6	1 / 6	2 / 6

- 3 -

Elabore um rotina que lhe permita gerar, tão eficientemente quanto possível, NPA com distribuição X, cuja função densidade de probabilidade é dada por :

a)
$$f_X(x) = \begin{cases} -0,5\,x + 0,5 & ;\ x \in [-1 , 1] \\ 0 & ;\ x \notin [-1 , 1] \end{cases}$$

b)
$$f_X(x) = \begin{cases} (2/3) + x^2 & ;\ x \in [-1 , 0] \\ 0 & ;\ x \notin [-1 , 0] \end{cases}$$

c)
$$f_X(x) = \begin{cases} 0,5 . \operatorname{sen}(x) & ;\ x \in [0 , \pi] \\ 0 & ;\ x \notin [0 , \pi] \end{cases}$$

d)
$$f_X(x) = \begin{cases} -2\,x & ;\ x \in [-1 , 0] \\ 0 & ;\ x \notin [-1 , 0] \end{cases}$$

e)
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ;\ x \in [1 , e] \\ 0 & ;\ x \notin [1 , e] \end{cases}$$

f)
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{12}{7}x^3 + \frac{12}{7}x^2 & ;\ x \in [0 , 1] \\ 0 & ;\ x \notin [0 , 1] \end{cases}$$

- 4 -

Uma variável aleatória com distribuição Lognormal $L(m, \sigma)$, de mediana m e parâmetro de forma σ, relaciona-se com a distribuição $Z \sim$ Normal $(0, 1)$ do modo seguinte:

$$L(m, \sigma) \sim m \, . \, \exp(\sigma \, . \, Z)$$

Como poderia gerar NPA com distribuição $L(m, \sigma)$?

- 5 -

Seja $X \sim \gamma_5(0{,}5)$ a variável aleatória Gama, para a qual é válida a indicação seguinte:

$$X \sim Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 \, ,$$

com Y_i ($i = 1, \ldots, 5$) variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição Exponencial ($\lambda = 0{,}5$), isto é ,

$$f_{Y_i}(y) = \begin{cases} 0 & ; \; y < 0 \\ 0{,}5 \; e^{-0{,}5\,y} & ; \; y \geq 0 \end{cases}$$

a) Elabore a rotina "GAMA5" , que lhe permita gerar números pseudo-aleatórios com distribuição X .

b) Elabore o fluxograma de um programa simplificado que permita estudar a distribuição da variável aleatória $H \sim$ Máximo (A , B) , sendo A e B duas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição $X \sim \gamma_5(0{,}5)$.

- 6 -

a) Elabore a rotina NOR01 que lhe permita gerar NPA com distribuição Normal Reduzida, isto é, $N(\mu = 0 \, ; \sigma = 1)$.

b) A variável aleatória Qui-Quadrado com n graus de liberdade é definida do modo seguinte:

$$\chi_n^2 \sim Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2$$

com Z_i i.i.d. e $Z_i \sim N(\mu = 0 \, ; \sigma = 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Elabore a rotina QUI5 que lhe permita gerar um NPA da distribuição χ_5^2 .

c) Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição χ_5^2 . Considere a variável aleatória W ~ Máximo (X_1,X_2,X_3) · Elabore um modelo de simulação simplificado que lhe permita estudar a distribuição da variável W.

- 7-

a) Elabore um modelo de simulação que lhe permita estudar a distribuição da variável aleatória $W = X - Y$, sendo X e Y duas variáveis aleatórias independentes:

X ~ Normal ($\mu = 2$; $\sigma = 3$) e Y ~ Exponencial ($\lambda = 0{,}5$).

Nota : $$f_Y(y) = \begin{cases} 0{,}5 \,.\, \exp(-0{,}5 \,.\, y) & ; \; y \geq 0 \\ 0 & ; \; y < 0 \end{cases}$$

b) Como poderia, a partir dos resultados fornecidos pelo modelo, estimar $P(X > Y)$?

- 8 -

Seja W_n ~ Mínimo ($X_1, X_2, \ldots, X_n$) , com X_i i.i.d. $X_i \sim N(\mu = 10, \sigma = 2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

a) Elabore um modelo de simulação que lhe permita estudar a distribuição de W_n .

b) Utilize o modelo elaborado para comparar as distribuições W_n , para n = 1, 2, 3, 5, 10, 20 e 50.

- 9 -

Considere um processo de ocorrências Poissoniano de média 3 por semana.

Admita que a cada ocorrência corresponde uma intensidade **I** ~ N ($\mu = 10$; $\sigma = 2$), e que o valor da intensidade de uma ocorrência é independente dos valores de intensidade das outras ocorrências.

Elabore um modelo de simulação que lhe permita estudar a distribuição do máximo anual da intensidade das ocorrências.

- 10 -

Considere o seguinte jogo aleatório:

Num saco (S1) são colocadas 10 fichas Azuis, 20 fichas Brancas, 40 fichas Verdes e 30 fichas Negras.

Noutro saco (S2) são colocadas 50 fichas Azuis, 5 fichas Brancas, 7 fichas Verdes e 38 fichas Castanhas.

Em cada jogada o jogador deve pagar 20$00 e retirar aleatoriamente uma ficha de cada saco.

O jogo só termina quando a cor das duas fichas extraídas for igual, recebendo então o jogador um Prémio (em função dessa cor) de acordo com a tabela seguinte:

Cor	Azul	Branco	Verde
Prémio	100 $ 00	500 $ 00	200 $ 00

Elabore um modelo de simulação simplificado que lhe permita estimar o valor médio e o desvio padrão do " lucro " associado a este jogo.

- 11 -

Considere o seguinte jogo aleatório para dois jogadores :

Cada jogador lança um par de dados equilibrados, sendo observadas as faces voltadas para cima.

O jogo termina se <u>apenas um</u> dos jogadores tiver obtido duas faces iguais voltadas para cima (caso tal não aconteça, os dois jogadores voltam a lançar os seus dados).

Elabore um modelo de simulação que lhe permita estimar a probabilidade de se terminar o jogo sem ultrapassar dez "lançamentos duplos" por jogador.

- 12 -

a) Elabore uma rotina simplificada que lhe permita gerar números pseudo-aleatórios com distribuição Uniforme { 501,502,...,1499,1500 }.

b) A produção diária de uma fábrica segue uma distribuição Uniforme { 501, 502, ... , 1499, 1500 } unidades. A procura diária do referido produto depende do dia da semana, de acordo com o Quadro seguinte:

Dia da semana	Procura diária (unidades)
2ª e 3ª Feira	Normal (μ = 800 ; σ = 150) (*)
4ª Feira	Normal (μ = 1000 ; σ = 180) (*)
5ª e 6ª Feira	Normal (μ = 1200 ; σ = 220) (*)

Nota (*) : Valores arredondados para números inteiros.

Se em determinado dia a produção for superior à procura, as unidades em excesso são armazenadas, ficando disponíveis para os dias seguintes.

Se em determinado dia a procura for superior ao número de unidades disponíveis (produção diária + unidades armazenadas), só se poderá satisfazer parcialmente a procura - haverá , portanto, "unidades pedidas mas não fornecidas" (esses pedidos não satisfeitos não transitam para o(s) dia(s) seguinte(s)).

Elabore um modelo de simulação que lhe permita determinar:

i) a distribuição do número de unidades armazenadas diariamente
ii) a distribuição do número de unidades pedidas mas não fornecidas

- 13 -

Considere um processo de chegadas de clientes a uma fila de espera descrito pelo quadro seguinte:

Cliente nº	Instante de chegada	Duração do atendimento	Cliente nº	Instante de chegada	Duração do atendimento
1	2	13	21	202	10
2	9	6	22	212	8
3	9	8	23	223	5
4	15	15	24	231	23
5	22	10	25	232	15
6	25	5	26	252	10
7	49	9	27	259	12
8	59	11	28	263	5
9	62	12	29	266	6
10	68	18	30	268	9
11	75	9	31	271	8
12	79	13	32	272	35
13	83	19	33	283	28
14	100	2	34	295	15
15	116	3	35	306	17
16	128	6	36	312	12
17	149	15	37	315	5
18	155	18	38	325	5
19	179	5	39	329	9
20	201	10	40	350	1

a) Simule "manualmente" o funcionamento da fila de espera, admitindo que é válida a *disciplina FIFO* (atendimento por ordem de chegada). Preencha um quadro como o seguinte:

T	Acontecimento	N	T espera	T fim	Tlivre

Notas: T - relógio

Acontecimento - chegada de cliente; partida de cliente; início de atendimento; final de atendimento

N - tamanho da fila de espera

T espera - tempo de espera de um cliente antes do início do seu atendimento.

T fim - instante previsto para o final do atendimento de um cliente

T livre - tempo livre do(s) atendedor(es)

i) Admita a existência de apenas um atendedor.
ii) Admita a existência de dois atendedores.

b) Elabore um modelo de simulação que lhe permita simular o funcionamento de uma fila de espera (FIFO / um atendedor).

- 14 -

O processo de chegadas de clientes a uma dada fila de espera pode ser considerado Poissoniano com taxa média igual a 0,7 por minuto.

Sabe-se que o tempo de atendimento de cada cliente se pode considerar com distribuição Tiangular [30; 60; 90] (*) segundos.

Admita que existe apenas um único servidor para proceder ao atendimento dos clientes.

Nota(*): Se U1 e U2 são v.a. i.i.d, tais que U1 ~ U2 ~ U[0;1], então U1 + U2 ~ Triangular[0; 1; 2]

a) Utilize os NPA U[0;1] seguintes para gerar as 10 primeiras chegadas de clientes após as 9:00 h.

0.1526 0.3063 0.4413 0.8898 0.0202 0.7723 0.1453 0.7020 0.4005 0.3174

b) Utilize os NPA U[0;1] seguintes para gerar as durações do atendimentos de cada um desses 10 clientes.

0.2114 0.8961 0.0415 0.7574 0.4862 0.4763 0.9575 0.0823 0.9456 0.2451
0.3940 0.1503 0.0740 0.3742 0.9603 0.7584 0.6057 0.2855 0.5159 0.9534

c) Simule <u>manualmente</u> o funcionamento da referida fila de espera, de modo a processar a entrada dos 10 primeiros clientes.

d) Relativamente ao instante em que entra o 10º cliente, determine o tamanho médio da fila de espera e o tempo médio de espera por cliente e o período total em que o servidor se encontra desocupado.

TABELA DE NÚMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS COM DISTRIBUIÇÃO UNIFORME [0 , 1]

0.1526	0.3063	0.4413	0.8898	0.0202	0.7723	0.1453	0.7020	0.4005	0.3174
0.0730	0.0229	0.5279	0.8635	0.5836	0.3996	0.8867	0.5824	0.2867	0.6288
0.2114	0.8961	0.0415	0.7574	0.4862	0.4763	0.9575	0.0823	0.9456	0.2451
0.3940	0.1503	0.0740	0.3742	0.9603	0.7584	0.6057	0.2855	0.5159	0.9534
0.5250	0.6509	0.1701	0.0322	0.0665	0.3923	0.2824	0.5417	0.7144	0.6815
0.4620	0.2787	0.2031	0.9405	0.5684	0.2901	0.5170	0.8411	0.7109	0.8728
0.8904	0.3051	0.2489	0.5737	0.8079	0.5045	0.7918	0.1896	0.0036	0.8612
0.1990	0.7674	0.4620	0.0469	0.5798	0.6040	0.4175	0.9836	0.2936	0.2463
0.3545	0.8432	0.9498	0.4911	0.0073	0.0474	0.4077	0.3853	0.3602	0.2683
0.7768	0.2258	0.6478	0.4277	0.4164	0.5595	0.3542	0.6974	0.9359	0.1832
0.2141	0.4993	0.1946	0.1438	0.2115	0.5054	0.3020	0.7383	0.5811	0.6374
0.6173	0.5134	0.8071	0.0673	0.7501	0.2660	0.6240	0.2169	0.5596	0.0430
0.0160	0.7581	0.1552	0.1413	0.2176	0.6127	0.8964	0.1078	0.7131	0.9528
0.3924	0.7394	0.2370	0.2000	0.5027	0.0828	0.7736	0.0264	0.3366	0.4350
0.5572	0.3537	0.2536	0.3429	0.0723	0.3539	0.8629	0.6034	0.0532	0.4488
0.0240	0.2632	0.4843	0.3103	0.8462	0.6194	0.5999	0.8603	0.6889	0.2187
0.8845	0.2706	0.1615	0.8580	0.0724	0.9632	0.1233	0.5843	0.1481	0.6099
0.6838	0.6943	0.3458	0.1325	0.2023	0.7350	0.1499	0.7030	0.2882	0.5033
0.2949	0.7432	0.8008	0.0459	0.7650	0.9251	0.8496	0.6599	0.7947	0.1704
0.7939	0.8920	0.8684	0.6510	0.2430	0.5392	0.7204	0.7889	0.0564	0.6482
0.3351	0.2559	0.3435	0.5161	0.9468	0.9738	0.4635	0.6896	0.0400	0.1146
0.0260	0.9657	0.3491	0.1002	0.8902	0.3912	0.8583	0.6023	0.1655	0.2629
0.8021	0.5429	0.2113	0.1279	0.6648	0.0939	0.6371	0.7828	0.1808	0.6771
0.3020	0.2747	0.3346	0.9644	0.3156	0.9004	0.3604	0.8776	0.0373	0.2067
0.7427	0.5888	0.0763	0.9906	0.2158	0.5196	0.2920	0.2989	0.7640	0.3421
0.7939	0.4285	0.6219	0.9780	0.9413	0.9262	0.2737	0.5993	0.3436	0.5890
0.4538	0.6278	0.8601	0.4637	0.1466	0.7354	0.6003	0.8472	0.5865	0.8439
0.9235	0.2863	0.2578	0.1254	0.4391	0.5780	0.8950	0.0015	0.0064	0.7691
0.4823	0.1443	0.7348	0.1565	0.2542	0.4755	0.9838	0.2870	0.6951	0.1671
0.3626	0.9576	0.5392	0.6409	0.7307	0.2151	0.7711	0.5689	0.1975	0.3564
0.6251	0.8728	0.1222	0.9284	0.5854	0.7245	0.1143	0.7279	0.3867	0.5460
0.0332	0.8018	0.0131	0.0090	0.9883	0.4470	0.6990	0.0356	0.3388	0.2104
0.9290	0.7975	0.6942	0.8888	0.4372	0.7166	0.9138	0.5291	0.2081	0.4649
0.1071	0.4282	0.4761	0.9641	0.6335	0.1330	0.7256	0.3861	0.1021	0.4403
0.6909	0.1529	0.3726	0.3970	0.3563	0.9363	0.5542	0.3000	0.9564	0.6582
0.0063	0.6962	0.9753	0.4904	0.3382	0.3824	0.1476	0.8548	0.4095	0.4056
0.4576	0.4234	0.3293	0.0625	0.1397	0.1179	0.4572	0.9001	0.6782	0.1102
0.4024	0.7152	0.8076	0.8223	0.0244	0.5547	0.5121	0.9260	0.4326	0.7156
0.0262	0.3432	0.9862	0.7446	0.8342	0.2457	0.2948	0.4386	0.6706	0.0555
0.2176	0.8445	0.5197	0.4444	0.8640	0.2593	0.6158	0.3342	0.5934	0.2297
0.4434	0.8969	0.0152	0.5526	0.7368	0.5543	0.9888	0.2749	0.4803	0.9783
0.6235	0.6936	0.9085	0.0908	0.2787	0.3554	0.5056	0.0636	0.5638	0.0572
0.0060	0.3187	0.3382	0.8460	0.3942	0.5278	0.7112	0.0185	0.9044	0.6130
0.0421	0.1217	0.0210	0.7460	0.9405	0.9525	0.4785	0.3487	0.2657	0.5577
0.2611	0.0930	0.1269	0.2341	0.6033	0.9008	0.8837	0.5287	0.9895	0.9440
0.1454	0.2384	0.1540	0.6444	0.7713	0.4100	0.0812	0.6738	0.8708	0.3403
0.0054	0.9543	0.8034	0.5763	0.4111	0.6576	0.1783	0.9149	0.0327	0.2056
0.8550	0.4029	0.8544	0.2703	0.9428	0.3371	0.1107	0.7734	0.8012	0.2646
0.2859	0.8869	0.0394	0.9820	0.1144	0.0325	0.5169	0.5364	0.5807	0.8823
0.3430	0.2246	0.9190	0.3581	0.8771	0.5934	0.6138	0.6317	0.7286	0.4398